Elettronica dello Stato Solido
Lezione 3: La radiazione di corpo nero

Daniele Ielmini

DEIB – Politecnico di Milano

daniele.ielmini@polimi.it

Outline

- Crisi della fisica classica
  - Radiazione del corpo nero
  - Effetto fotoelettrico
  - Diffrazione da particelle
- Conclusioni

Limiti della fisica classica

- Oggi sappiamo che le leggi della fisica classica (e.g. equazioni di Newton, di Maxwell) non sono adatte a descrivere la fisica dell'ultrapiccolo: qui abbiamo bisogno della meccanica <u>quantistica</u>
- Analogia con la teoria relativistica per l'ultraveloce
- Entrambe sono teorie generalizzate che includono la meccanica classica come limite alle grosse dimensioni/basse velocità
- Nuova costante universale: h (costante di Planck) simile a c (relatività)
- Ma la meccanica classica non si rivela necessariamente solo andando nell'ultrapiccolo, ci sono alcune manifestazioni macroscopiche come la radiazione di corpo nero e l'effetto fotoelettrico

Storia di una rivoluzione

- Attorno al 1900-1910, queste osservazioni erano rompicapi che menti come Planck ed Einstein alla fine risolsero battendo la strada per la teoria quantistica
- Questa fu sviluppata negli anni 20-30 da Schrödinger e Heisenberg

La radiazione termica

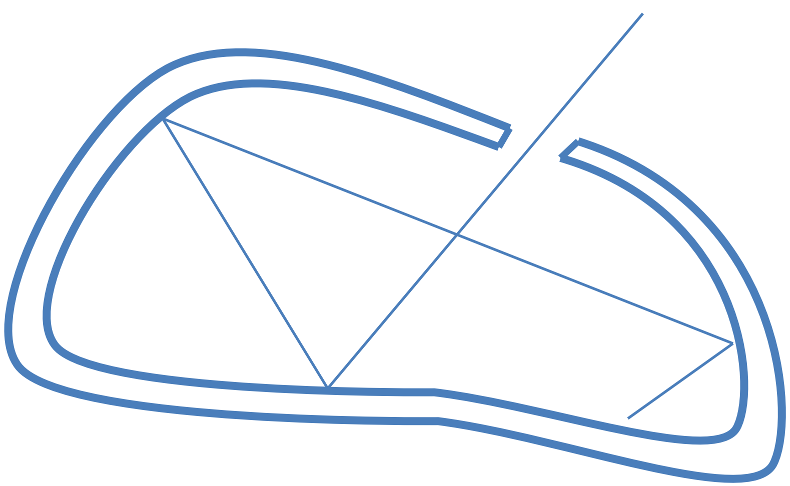
- Radiazione termica (RT) = radiazione elettromagnetica emanata da un corpo a temperatura T
- RT dipende da T: RT occupa più alte frequenze e più corte lunghezze d'onda all'aumentare di T
- Bassa temperatura: i corpi sono visibili per riflessione/diffusione
- Alta temperatura: i corpi emettono luce propria, e.g. filamento a incandescenza @2000 K, o ferro incandescente rosso @1000K
- La RT viene sfruttata nei pirometri per misure di T (e.g. una stella, o il corpo umano)

Il corpo nero

- Lo spettro della radiazione dipende dalla composizione della superficie del corpo
- Caso speciale è quello di corpi che assorbono tutta la radiazione incidente: questi corpi appaiono neri quando la loro temperatura è bassa
- Per i corpi neri, la RT ha carattere universale
- A causa di questo carattere universale, questi corpi sono stati oggetto di intenso studio

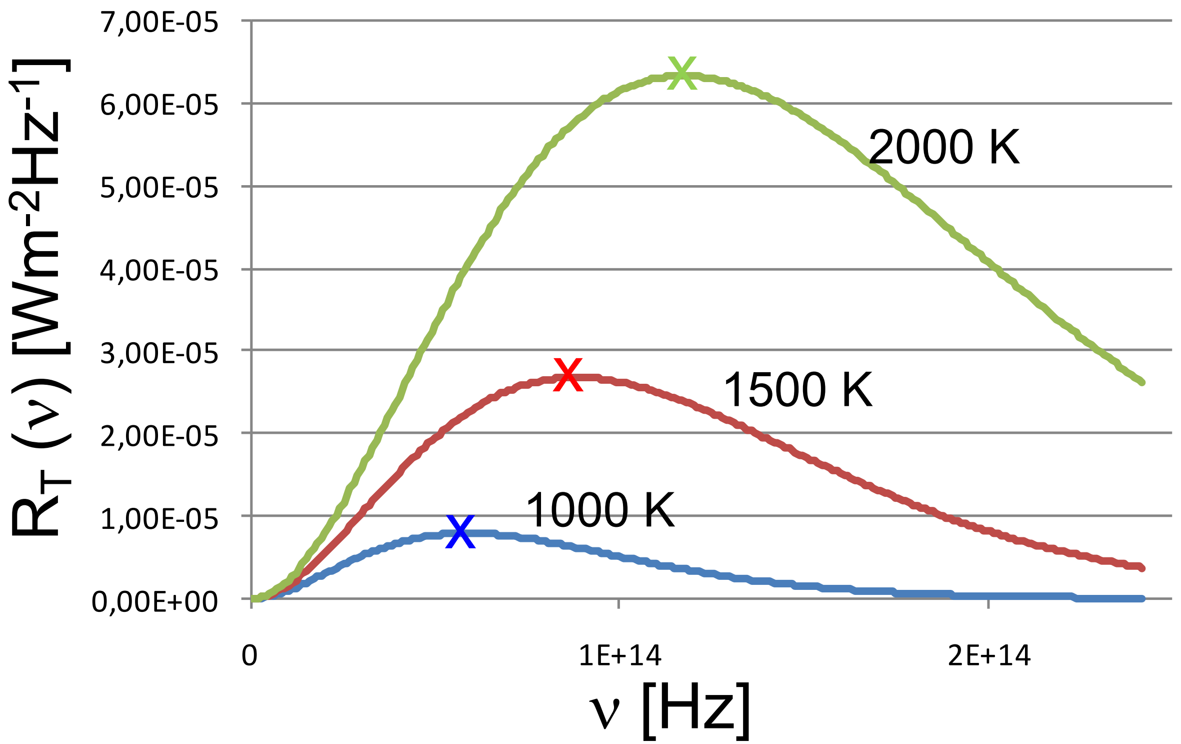
Esempi di corpi neri

- Oggetti con colorazione nera/scura
- Il sole, le stelle e l'universo
- Corpi neri per esperimenti pratici: cavità con una piccola apertura: una volta che la luce vi entra, è molto difficile che riesca a uscire. In altre parole, tutta la radiazione incidente è assorbita → l'<u>apertura</u> ha le proprietà del corpo nero



Radianza spettrale di un corpo nero

- $R_T(\nu)d\nu$ = radianza spettrale = energia emessa per unità di tempo, per unità di area della superficie di un corpo a temperatura T, nell'intervallo di frequenze da ν a $\nu+d\nu$



Legge di Wien:
$\nu_{max} \propto T$

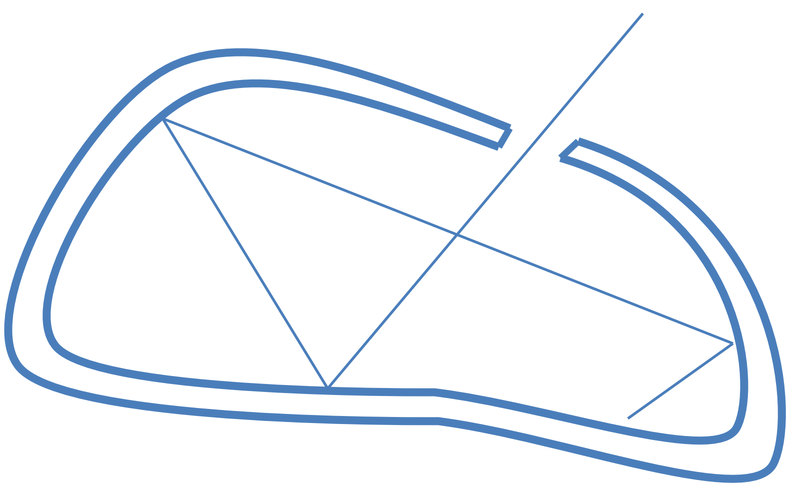
Radianza e legge di Stefan

- R_T = radianza = $\boldsymbol{R_T} = \int_0^\infty \boldsymbol{R_T}(\nu)\, \boldsymbol{d}\nu$
- Legge di Stefan (1879): $R_T = \sigma T^4$
- Costante di Stefan-Boltzmann

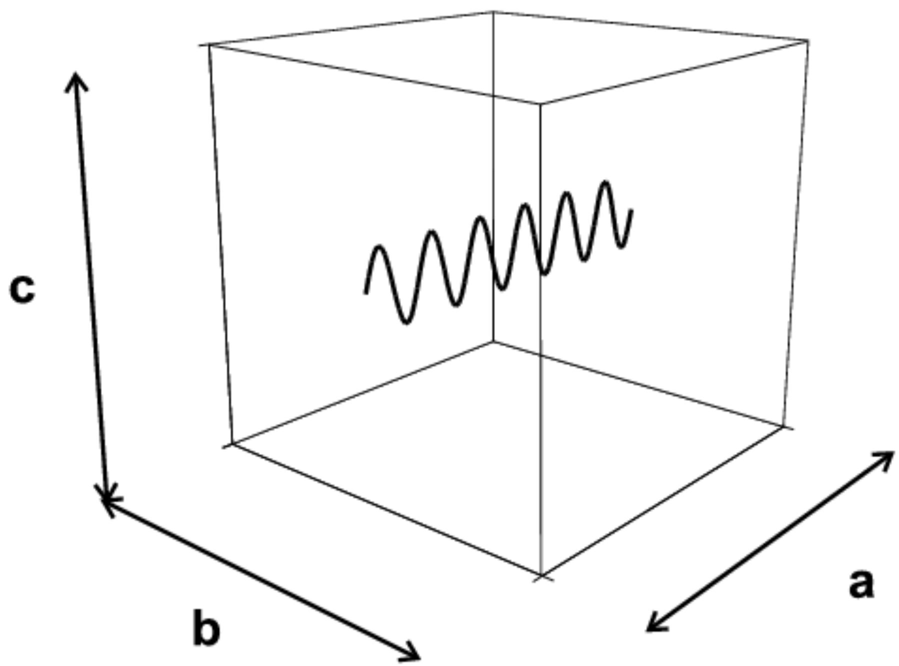
$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$

Teoria del corpo nero

- Cavità all'equilibrio a temperatura T delle pareti
- La radiazione uscente dall'apertura è un campione della radiazione termica nella cavità
- Possiamo definire una densità di energia di radiazione termica, data da $\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu)$
- Descrizione della black-body radiation (BBR) è possibile studiando la RT nella cavità



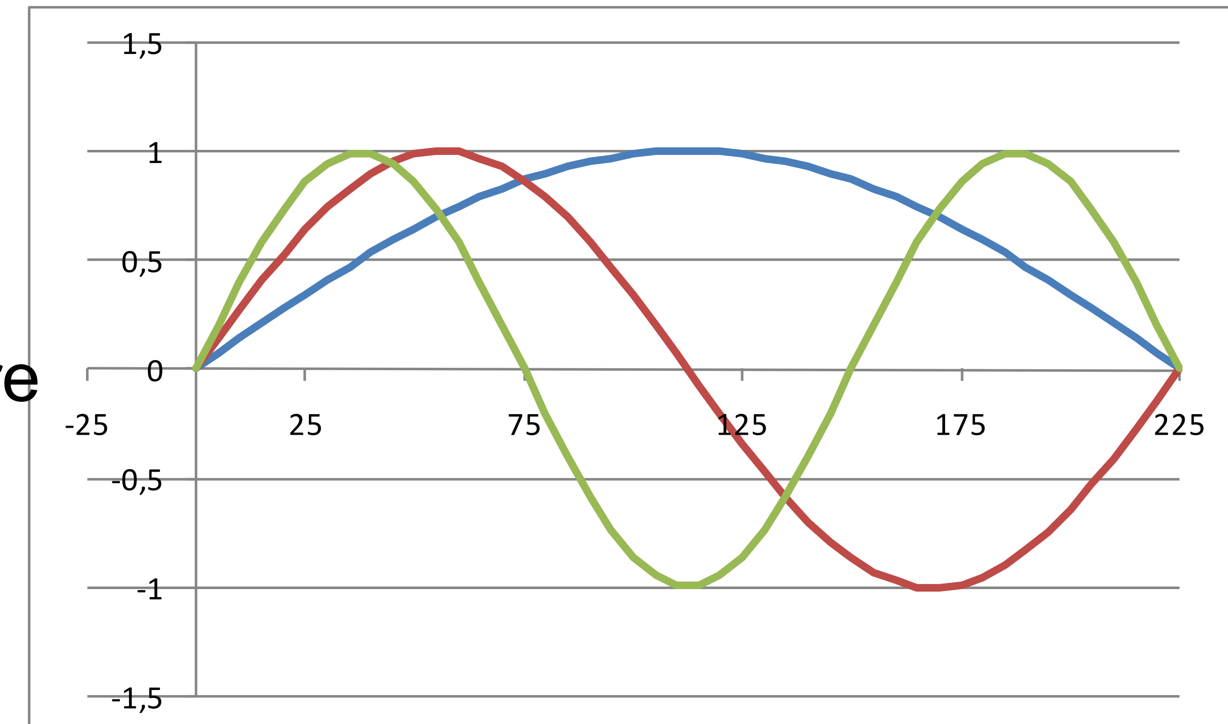
Cavità all'equilibrio termico



- Le pareti emettono RT a seguito del moto accelerato di portatori
- RT nella cavità può essere descritta da <u>onde stazionarie</u>, cioè con il campo elettrico costantemente nullo sulle pareti

Numero di onde stazionarie

- Consideriamo una cavità 1D virtuale con lunghezza = a
- Ci sono solo modi discreti con lunghezza d’onda data da :
  - $\lambda/2 = a$
  - $\lambda = a$
  - $3\lambda/2 = a$
  - …
  - $\lambda=2a/n$ oppure

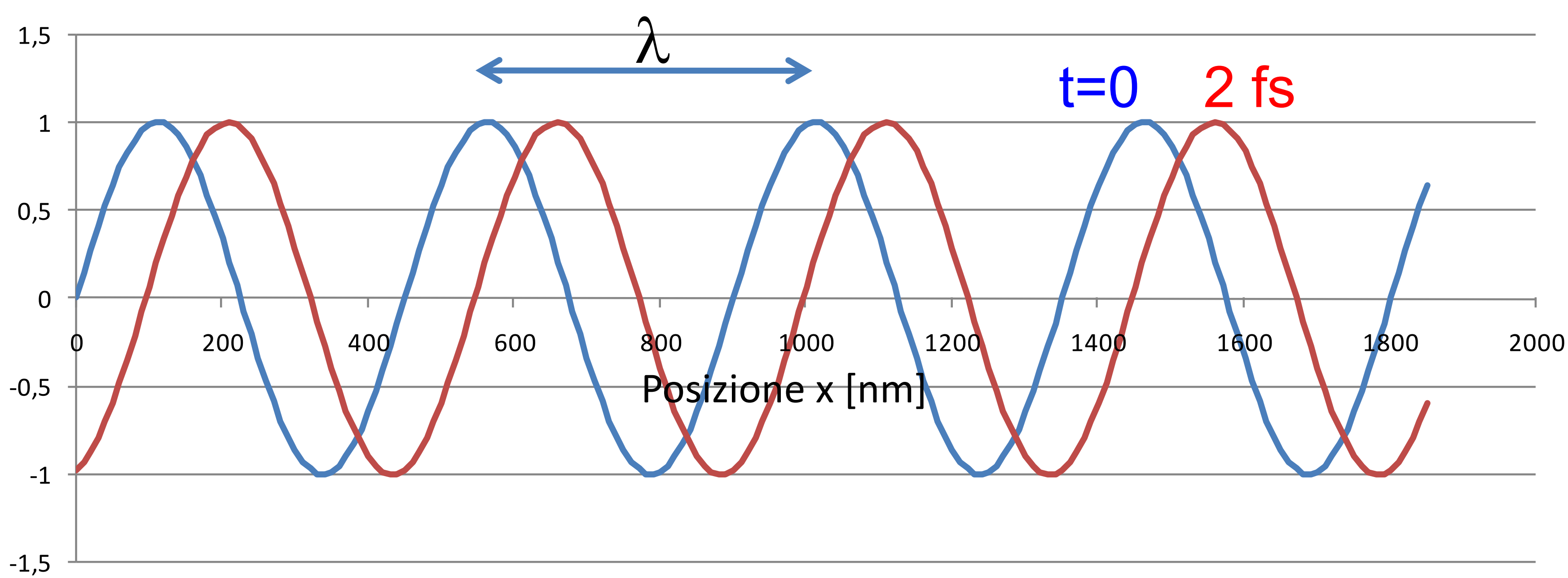


$$\nu = \boldsymbol{n}\frac{\boldsymbol{c}}{2\boldsymbol{a}}$$

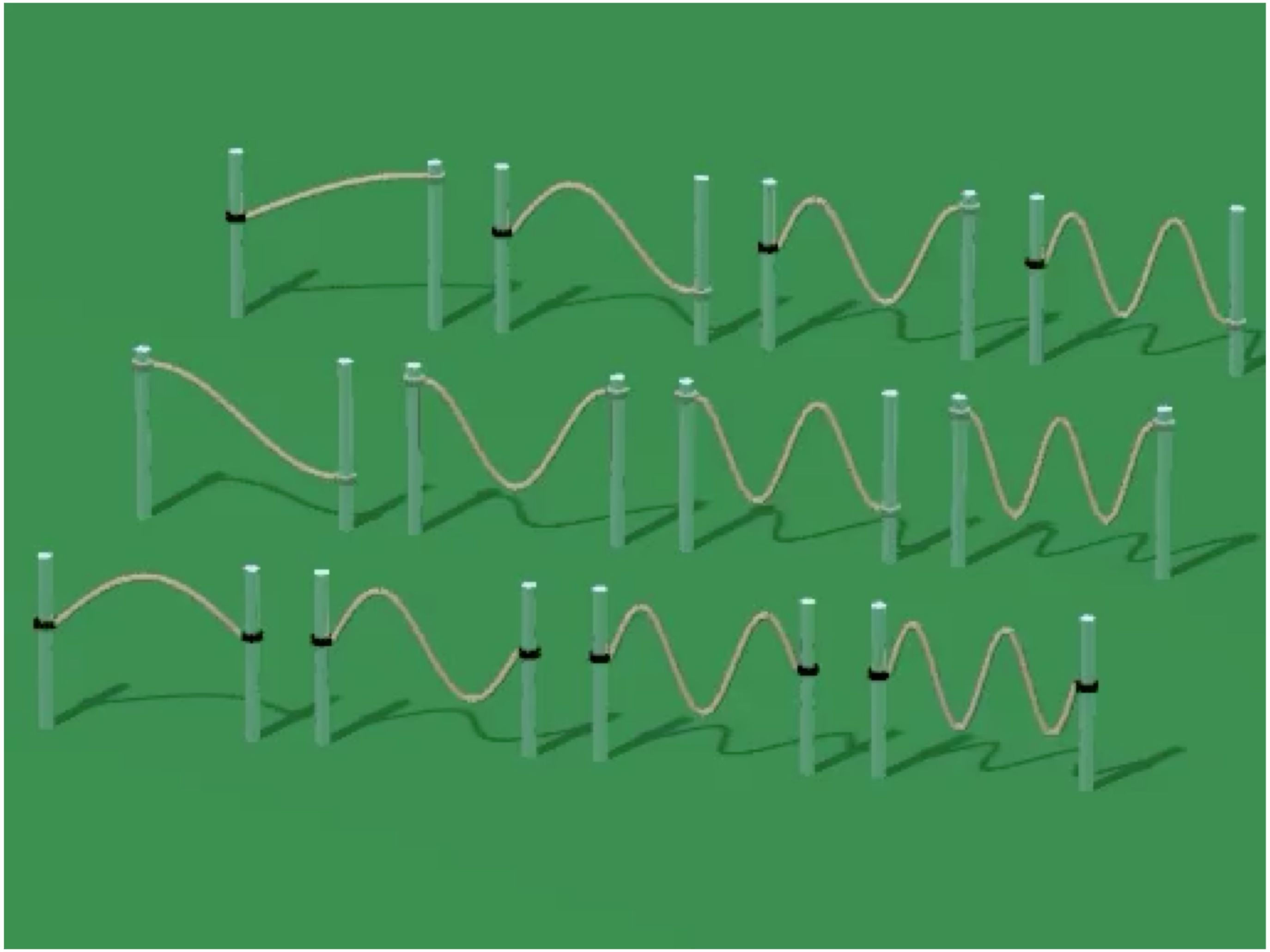
$$\boldsymbol{n} = 1, 2, 3\ldots$$

Radiazione elettromagnetica

- Frequenza ν [Hz]
- Lunghezza d'onda λ [m]
- Relazione: $\lambda\nu = c$



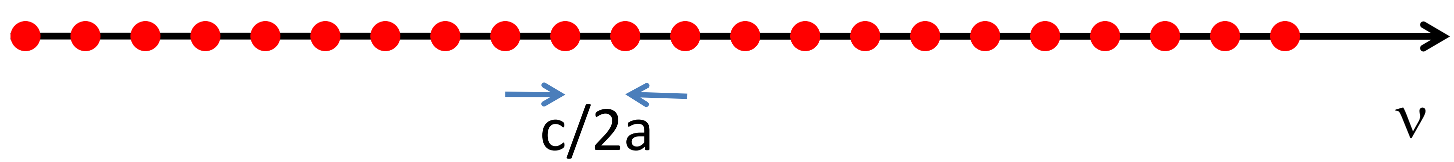
Onde stazionarie 1D



http://phys23p.sl.psu.edu/phys_anim/waves/indexer_waves.html

Numero di modi in 1D

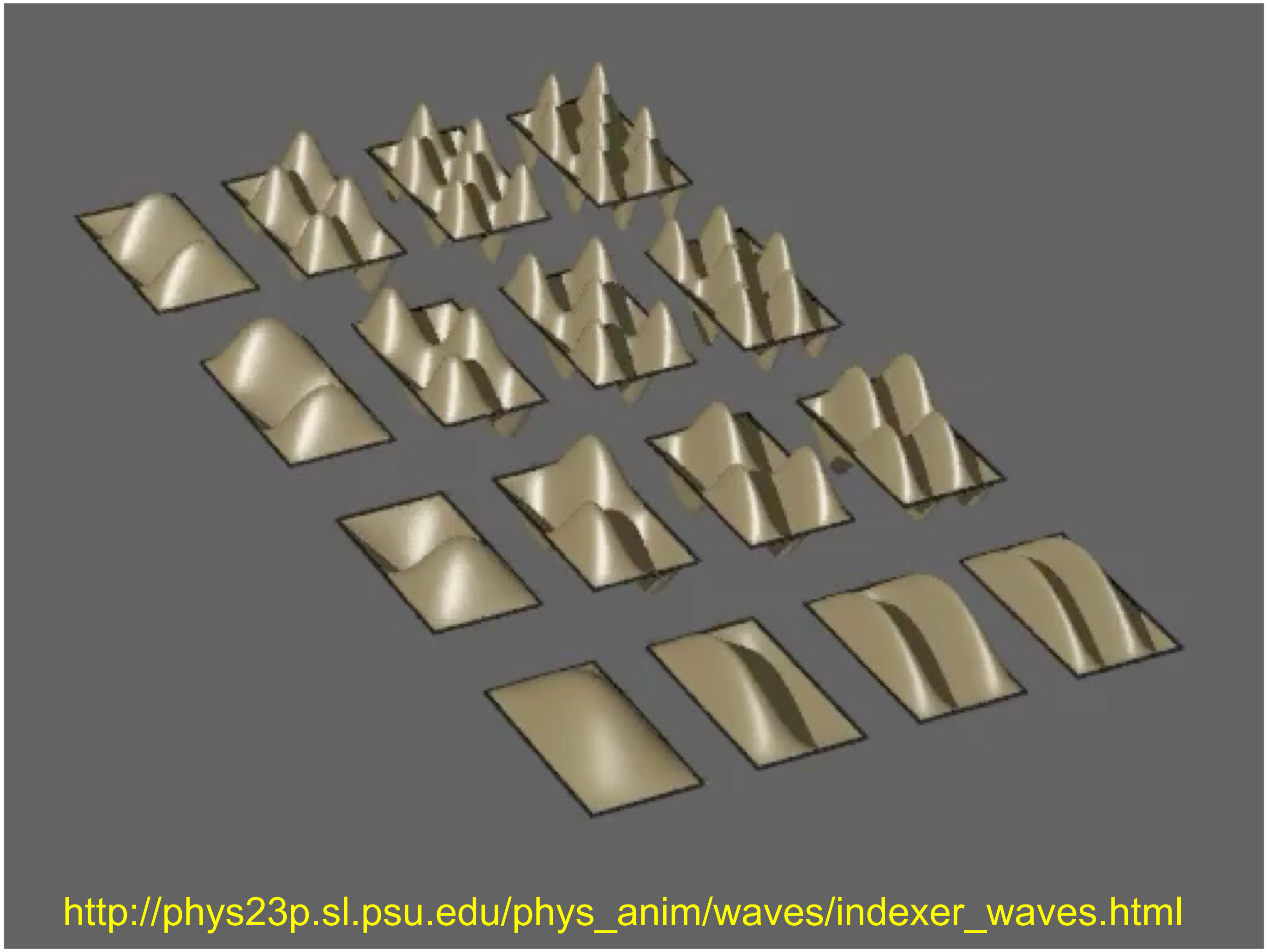
- Valori permessi di frequenza in 1D:



- Nota: ogni punto corrisponde a due modi, associati alle due polarizzazioni trasversali del campo elettrico
- Quanti modi per Hz? Due per ogni c/2a →

$$N(\nu)d\nu = 2\frac{2a}{c}d\nu$$

Onde stazionarie 2D



- Funzioni che descrivono oscillazione di membrana stazionaria: $E(x,y,t) = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \sin \omega t$

Condizione di stazionarietà

- Identica a quella in 1D:
  - $\lambda_x/2 = a$
  - $\lambda_x = a$
  - $3\lambda_x/2 = a$
  - …
  - $\lambda_x=2a/n_x$
  - $\lambda_y/2 = a$
  - $\lambda_y = a$
  - $3\lambda_y/2 = a$
  - …
  - $\lambda_y=2a/n_y$

$$\boldsymbol{k_x} = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{2\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n_x} = \frac{\pi}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n_x}$$

$$\boldsymbol{n_x} = 1,2,3\ldots$$

$$\boldsymbol{k_y} = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{2\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n_y} = \frac{\pi}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n_y}$$

$$\boldsymbol{n_y} = 1,2,3\ldots$$

Modi stazionari 2D

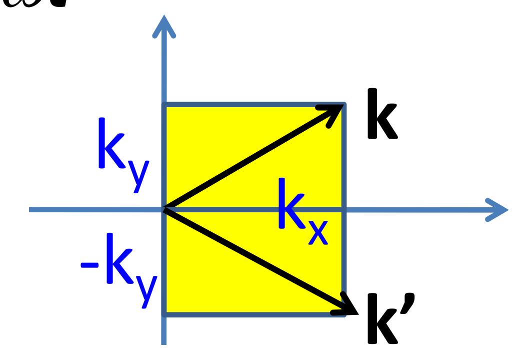
$$E = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \sin \omega t$$

$$= E_0 \frac{\left(e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}\right)\left(e^{ik_y y} - e^{-ik_y y}\right)}{-4} \sin \omega t$$

$$= E_0 \frac{e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{i(k_x x - k_y y)} - e^{-i(k_x x - k_y y)} + e^{-i(k_x x + k_y y)}}{-4} \sin \omega t$$

$$= E_0 \frac{\cos\left(k_x x + k_y y\right) - \cos\left(k_x x - k_y y\right)}{-2} \sin \omega t$$

$$= E_0 \frac{\cos\left(\vec{k} \bullet \vec{r}\right) - \cos\left(\vec{k}' \bullet \vec{r}\right)}{-2} \sin \omega t$$



- Come si determina ω, ν?

Determinazione di ν

- Vettore d'onda **k = k**$_x$ **+ k**$_y$, modulo k = $(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$
- Il vettore d'onda e la frequenza risultanti sono:

$$\boldsymbol{k_x} = \frac{\pi}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n_x}$$

$$\boldsymbol{k_y} = \frac{\pi}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{n_y}$$

$$\boldsymbol{n_x}, \boldsymbol{n_y} = 1, 2, 3 \ldots$$

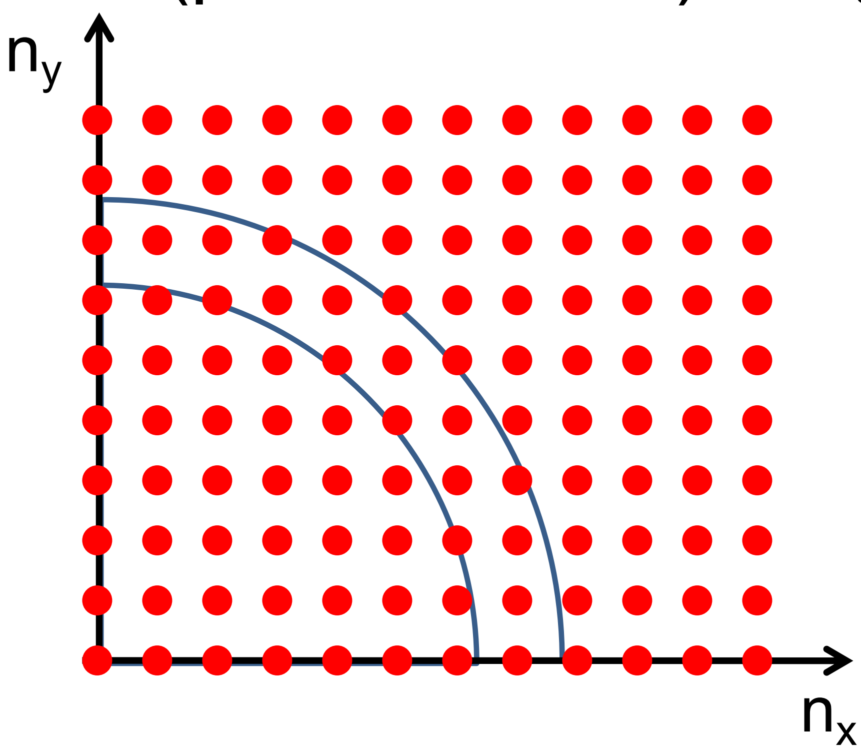
$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_x^2} + \boldsymbol{k_y^2} = \frac{\pi\sqrt{\boldsymbol{n_x^2} + \boldsymbol{n_y^2}}}{\boldsymbol{a}}$$

$$\nu = \frac{\boldsymbol{c}}{\lambda} = \frac{\boldsymbol{kc}}{2\pi} = \frac{\boldsymbol{c}\sqrt{\boldsymbol{n_x^2} + \boldsymbol{n_y^2}}}{2\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{cn}}{2\boldsymbol{a}}$$

$$\boldsymbol{n} = \sqrt{\boldsymbol{n_x^2} + \boldsymbol{n_y^2}}$$ (non è intero!)

Numero di modi in 2D

- Quanti modi tra ν e $\nu + d\nu$? Sono $N(\nu)d\nu = N(n)dn$, dato dal numero di nodi nella corona circolare tra $n = (n_x^2+n_y^2)^{1/2}$ e $n+dn$
- Area dello shell = $2\pi n dn$, la densità di modi è 2 (polarizzazioni) in ogni 'cella unitaria' →



$$N(n)dn = 2\frac{2\pi n}{4}dn$$

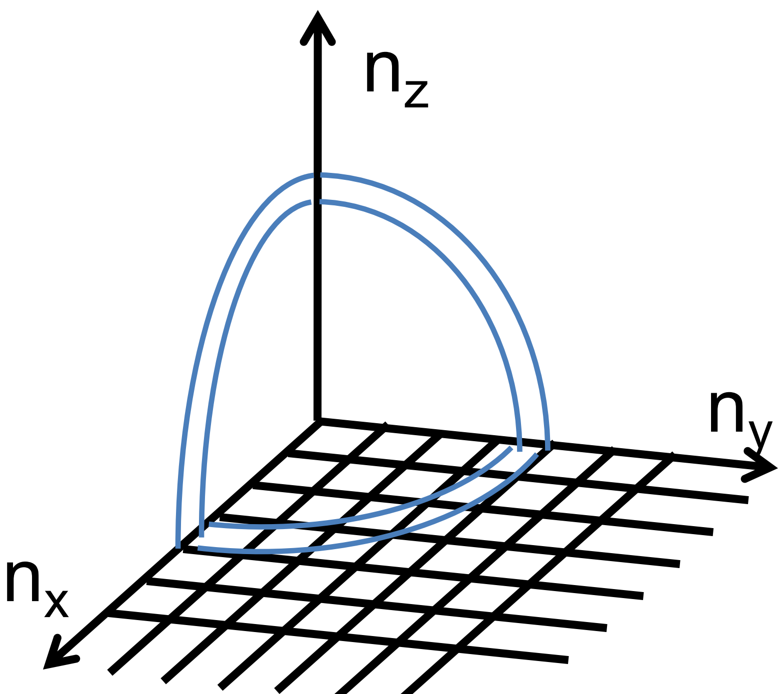
Solo ν positivi!

$$n = \frac{2a}{c}\nu, \quad dn = \frac{2a}{c}d\nu$$

$$N(\nu)d\nu = \pi\left(\frac{2a}{c}\right)^2 \nu d\nu$$

Numero di modi in 3D

- Lo stesso, ma considerando un <u>guscio sferico</u> tra $n = (n_x^2+n_y^2+n_z^2)^{1/2}$ e n+dn
- Volume della shell = $4\pi n^2 dn$, densità di modi = 2 (polarizzazioni) in ogni cella (cubo) unitario →



$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{dn} = 2\frac{4\pi \boldsymbol{n}^2}{8}\boldsymbol{dn}$$

Solo ν positivi!

$$\boldsymbol{n} = \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\nu, \quad \boldsymbol{dn} = \frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{d}\nu$$

$$\boldsymbol{N}(\nu)\boldsymbol{d}\nu = \pi\left(\frac{2\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\right)^3 \nu^2 \boldsymbol{d}\nu$$

Normalizzazione sul volume

- 1D $\boldsymbol{N}\left(\nu\right)\boldsymbol{d}\nu = 2\frac{2}{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{d}\nu$ [m^{-1}]
- 2D $\boldsymbol{N}(\nu)\boldsymbol{d}\nu = \pi\left(\frac{2}{\boldsymbol{c}}\right)^2 \nu\boldsymbol{d}\nu$ [m^{-2}]
- 3D $\boldsymbol{N}(\nu)\boldsymbol{d}\nu = \pi\left(\frac{2}{\boldsymbol{c}}\right)^3 \nu^2\boldsymbol{d}\nu$ [m^{-3}]

… e la densità di modi in 4D?

Energia media per modo

- Abbiamo ricavato la densità di modi per unità di volume tra ν e $\nu + d\nu$
- Per calcolare la densità di energia dobbiamo assegnare un'energia media per modo
- Fisica classica: principio di equipartizione dell'energia. Ad esempio, in un gas ogni atomo ha, in media, un'energia cinetica pari a $kT/2$ per grado di libertà → $3kT/2$ per un gas mono-atomico
- Il singolo modo RT ha due gradi di libertà (campo magnetico + elettrico, o equivalentemente energia cinetica + potenziale dell'oscillatore armonico) → $\langle E \rangle = kT$
- k = costante di Boltzmann = $1.38 \times 10^{-23}\ JK^{-1}$
- Fisica classica → ogni modo ha la stessa energia indipendentemente dalla sua frequenza

Principio di equipartizione

$$<\frac{1}{2}mv_x^2> = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{2}mv_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x}{\int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x} = kT \frac{\int_0^\infty \frac{mv_x^2}{2kT} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d\sqrt{\frac{mv_x^2}{2kT}}}{\int_0^\infty e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} d\sqrt{\frac{mv_x^2}{2kT}}}$$

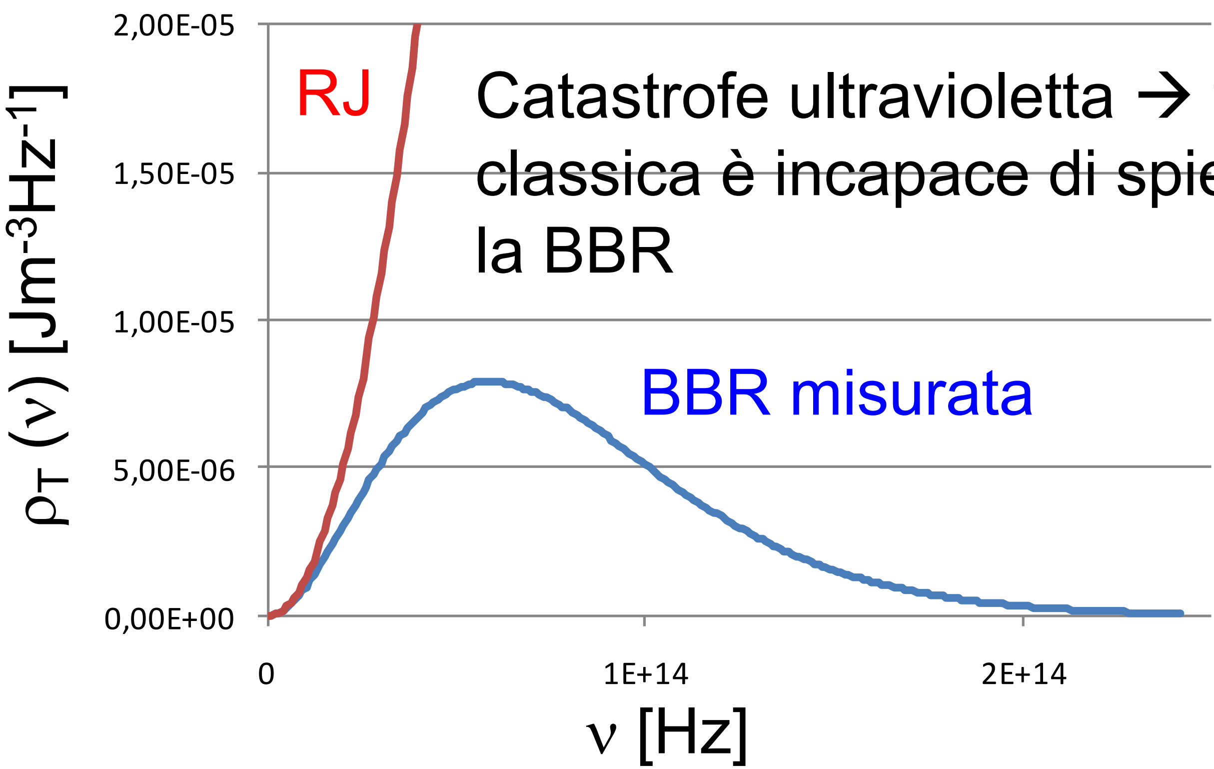
$$= kT \frac{\int_0^\infty \eta^2 e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = kT \frac{-\int_0^\infty \frac{\eta}{2} de^{-\eta^2}}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = kT \frac{\left[-\frac{\eta}{2} \quad e^{-\eta^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\eta^2} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{kT}{2}$$

- Le energie sono tutte <u>possibili</u> e hanno <u>probabilità</u> esponenzialmente decrescente

Formula di Rayleigh-Jeans

- Densità di energia = densità di modi x energia media

$$\rho_T(\nu)d\nu = N(\nu) < E > d\nu = \pi\left(\frac{2}{c}\right)^3 \nu^2 kTd\nu$$



Catastrofe ultravioletta → fisica classica è incapace di spiegare la BBR

Postulato di Planck

- Planck osservò che, se <E> non fosse costante (e.g. kT) ma variasse con la frequenza, la BBR potrebbe essere riprodotta
- A bassa frequenza: <E> = kT (limite classico)
- Ad alta frequenza: <E> → 0
- Come possiamo ottenere questo risultato? Quantizzazione dell’energia
- Invece di assumere un continuo di E, Planck postulò che E = nΔE, n = 1, 2, 3, …

Calcolo dell’energia media

- Il principio di equipartizione deriva dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann: all’equilibrio termico, la probabilità per un’entità (e.g. un atomo in un gas o un oscillatore in una cavità) di avere energia tra E ed E+dE è:

$$P(E) = \frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}}$$

- Quindi <E> è:

(equipartizione)

$$<E> = \frac{\int_0^\infty E P(E) dE}{\int_0^\infty P(E) dE} = \frac{1}{kT} \int_0^\infty E e^{-\frac{E}{kT}} dE = kT$$

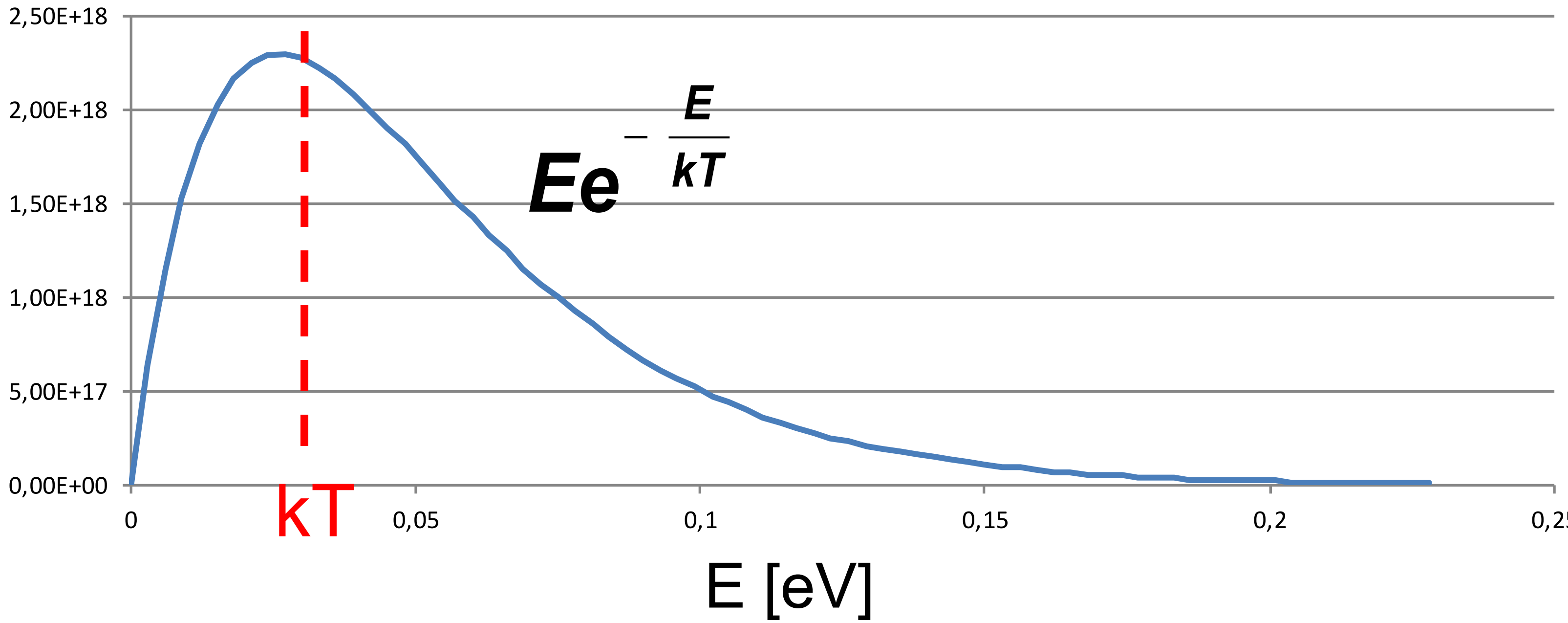
Alcuni passaggi

$$\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}dE = kT\int_0^\infty e^{-x}dx = -kT\left[e^{-x}\right]_0^\infty = kT$$

$$\int_0^\infty Ee^{-\frac{E}{kT}}dE = (kT)^2\int_0^\infty xe^{-x}dx = -(kT)^2\int_0^\infty x\,de^{-x}$$
$$=(kT)^2\left(-\left[xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx\right)=(kT)^2$$

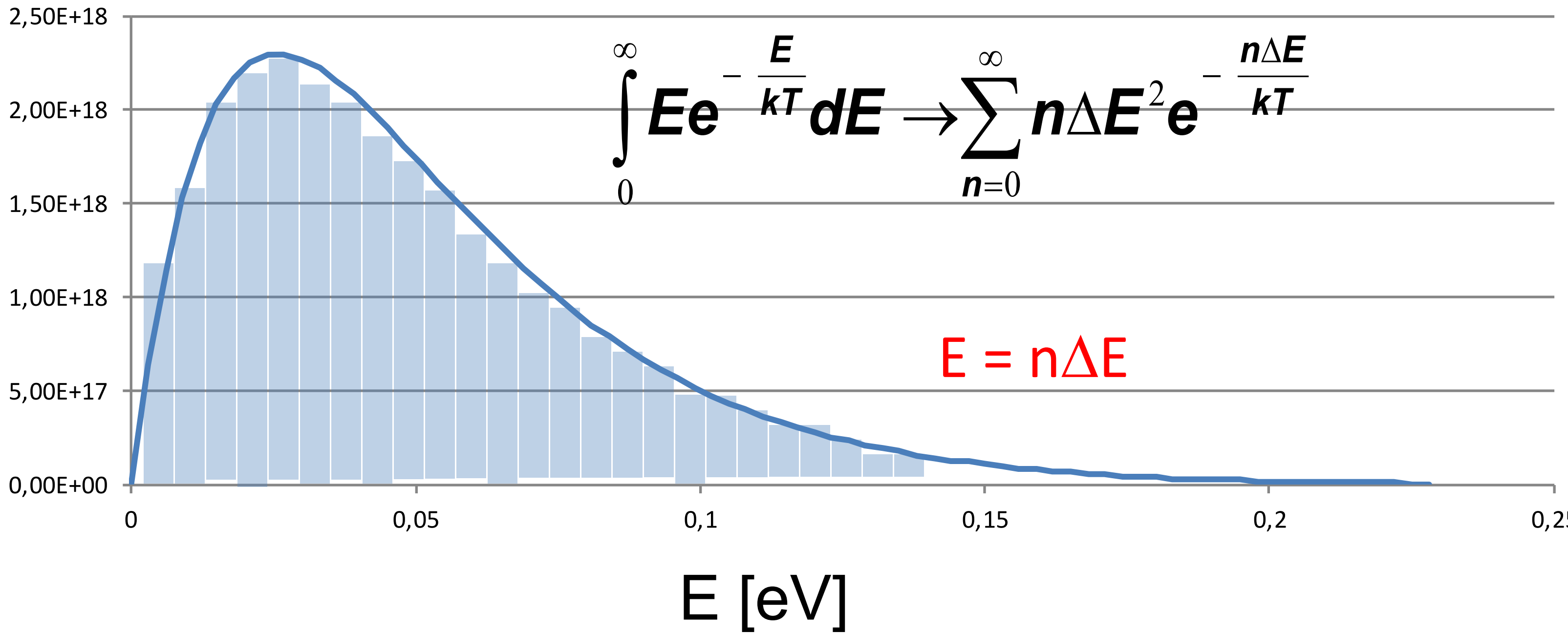
$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty EP(E)dE}{\int_0^\infty P(E)dE} = \frac{\int_0^\infty Ee^{-\frac{E}{kT}}dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}dE}=$$
$$kT\frac{\int_0^\infty xe^{-x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}dx} = kT\frac{-\int_0^\infty x\,de^{-x}}{\int_0^\infty e^{-x}dx} = kT\frac{-\left[xe^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}dx} = kT$$

Energia media classica



$$<E>=\frac{1}{kT}\int_0^{\infty} Ee^{-\frac{E}{kT}}dE$$

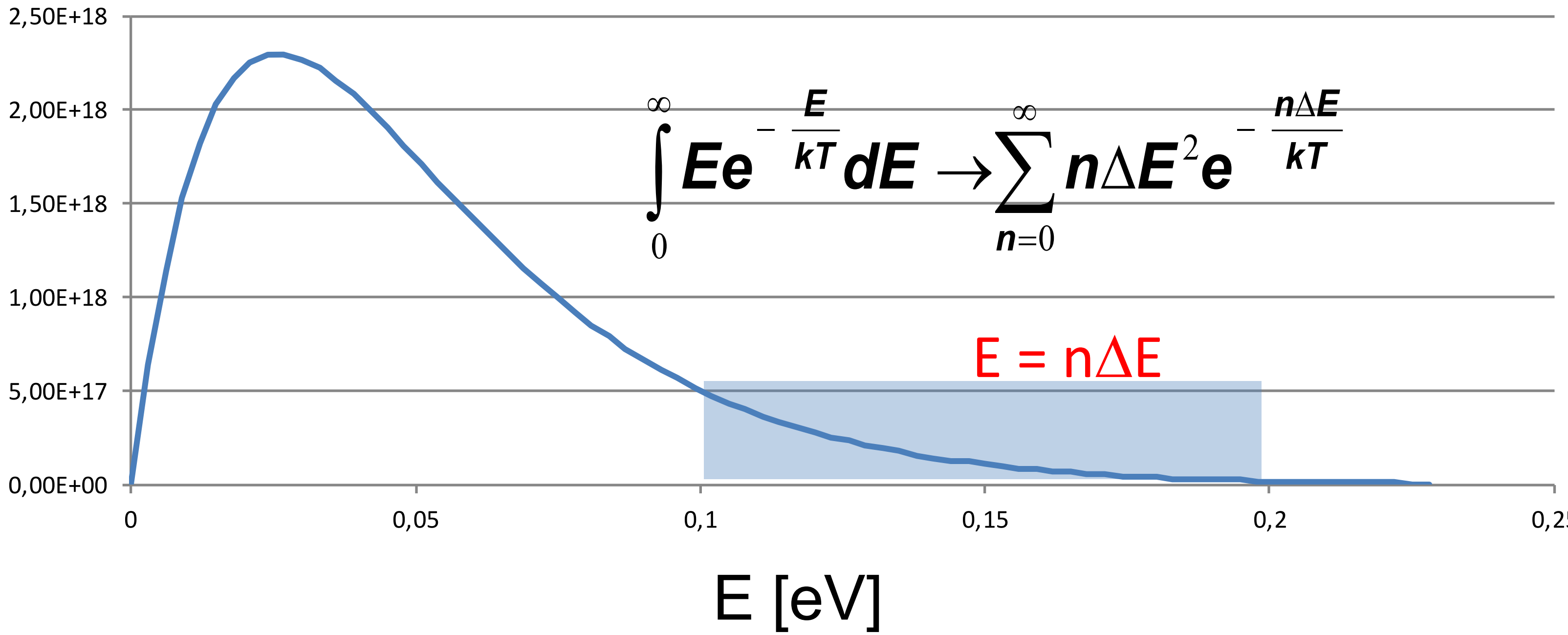
Energia media quantistica: piccolo ΔE



$$\int_0^\infty E e^{-\frac{E}{kT}} dE \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n \Delta E^2 e^{-\frac{n\Delta E}{kT}}$$

- L'integrale è ancora circa pari al caso continuo

Energia media quantistica: grande ΔE



- L'integrale è diverso, l'area è minore del caso continuo → l'energia media <E> → 0 per $\Delta E > kT$
- Per riprodurre la BBR (<E>=kT per piccola ν, <E>=0 per grande ν) dovremmo postulare $\Delta E = h\nu$

→ $E = nh\nu$ con n = 1, 2, 3, … e h = costante di Planck

Energia media quantistica – 1

- La discussione precedente è solo qualitativa per rappresentare il ragionamento di Planck
- Vediamo ora la sua ipotesi in termini analitici:

$$< E > = \frac{\int_0^\infty E P(E) dE}{\int_0^\infty P(E) dE} \rightarrow < E > = \frac{\sum_{n=0}^\infty E P(E)}{\sum_{n=0}^\infty P(E)} = \frac{\sum_{n=0}^\infty nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

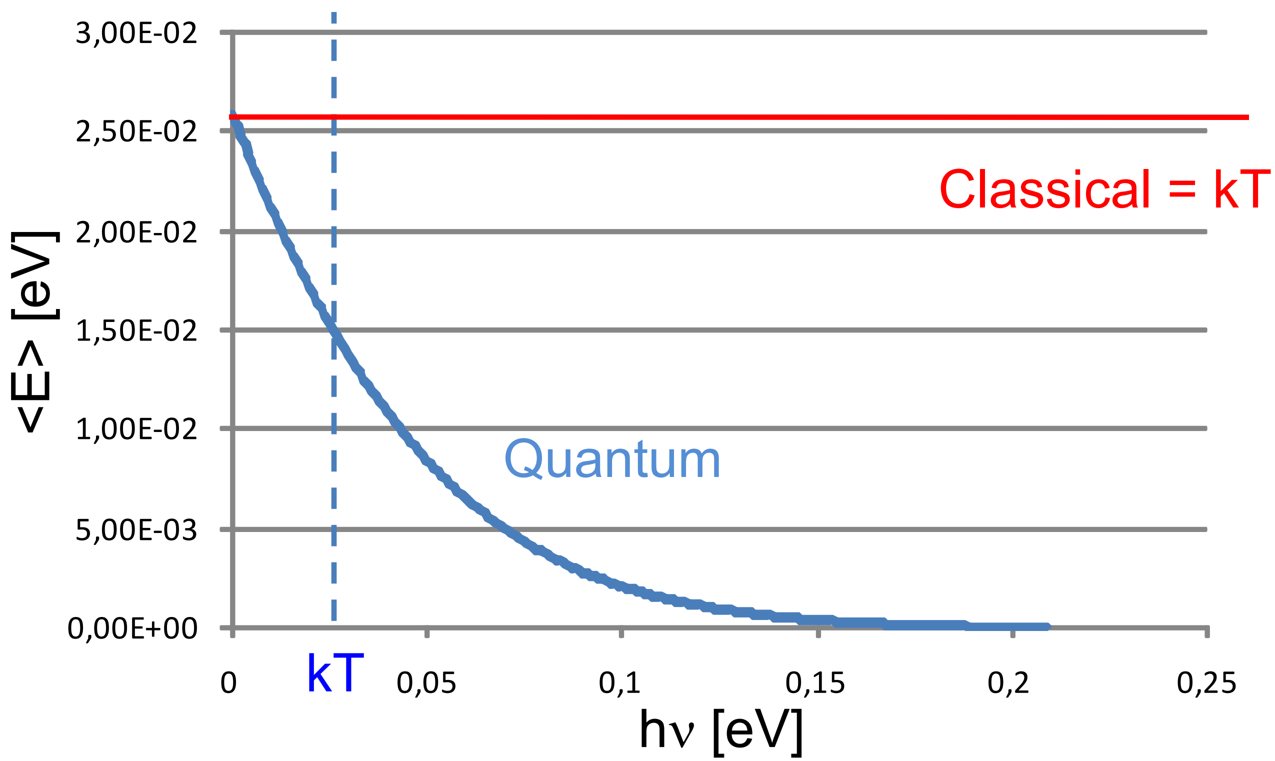
x=hν/(KT)

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$$

$$= kT \frac{\sum_{n=0}^\infty nxe^{-nx}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}} = -kTx \frac{d}{dx} \log \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} = -h\nu \frac{d}{dx} \log \sum_{n=0}^\infty \left(e^{-x}\right)^n$$

Energia media quantistica – 2

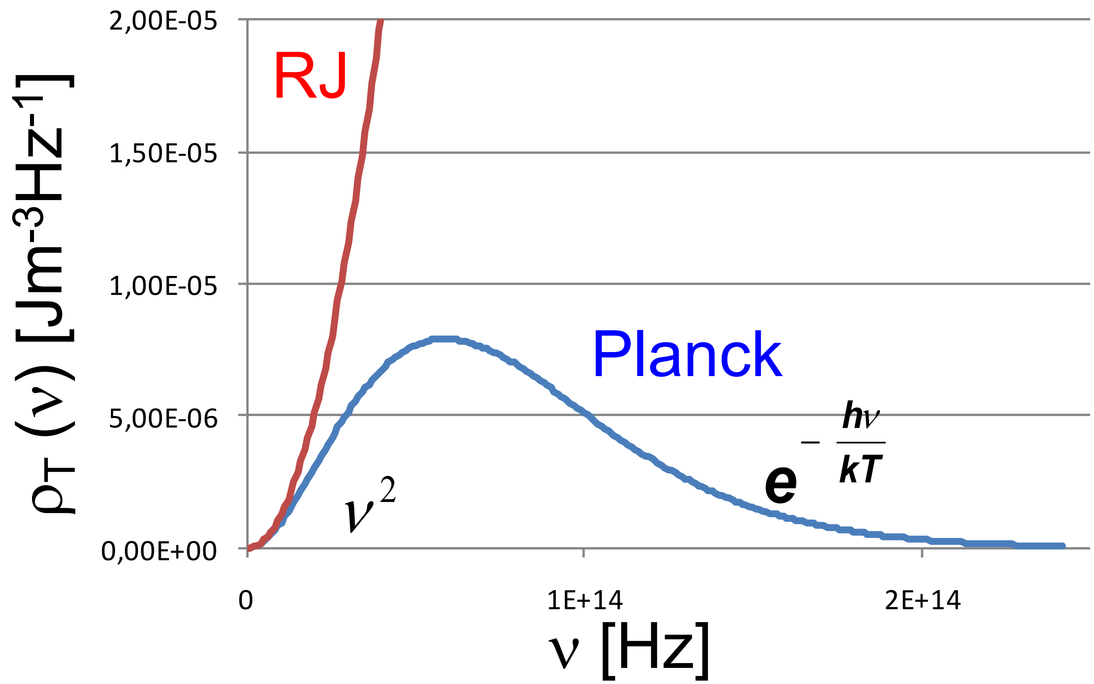
$$<E> = -h\nu \frac{d}{dx}\log\frac{1}{1-e^{-x}} = h\nu \frac{d}{dx}\log\left(1-e^{-x}\right) = h\nu \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$



Densità di energia

- La densità di energia quindi è data da:

$$\rho_T(\nu)d\nu = N(\nu) < E > d\nu = \pi\left(\frac{2}{c}\right)^3 \nu^2 \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu$$



Interpretazione della densità di energia

- La densità di energia può essere letta in un modo alternativo: densità di modi * energia del modo * statistica di occupazione
- Useremo lo stesso approccio per la densità di elettroni/lacune in metalli/semiconduttori

Energia del modo

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, h\nu\, \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\, d\nu$$

Densità di modi per unità di volume tra ν e $\nu+d\nu$

Numero medio <n> di fotoni che popolano il modo: distribuzione di Bose-Einstein

Note

- Calcolate la densità di energia spettrale per unità di lunghezza d'onda, non frequenza
- Postulato di Planck: ogni entità fisica che può essere descritta da un oscillatore armonico (radiazione EM, vibrazione termiche nel reticolo, particelle confinate nel potenziale parabolico) può solo possedere un'energia totale $E = nh\nu$
- Come vedremo in una delle prossime lezioni, l'esatta legge di quantizzazione dell'oscillatore armonico dice $E=(n+1/2)h\nu$: cambia il nostro risultato?

Conclusioni

- La BBR causa un empasse nella comunità scientifica: le leggi classiche non possono spiegarla
- Il postulato di Planck basato sulla quantizzazione dell'energia permette una spiegazione
- Risultato rivoluzionario che stimola la transizione ad una nuova era scientifica