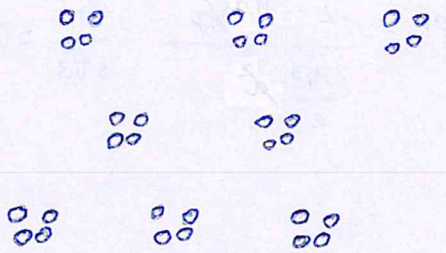
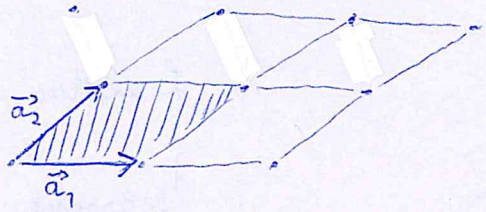
PROVA IN ITINERE 6.5.2015

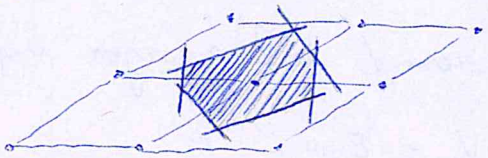
(1)



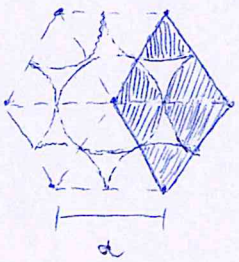
- Il reticolo NON è di Bravais
- Il corrispondente reticolo di Bravais è il reticolo obliquo.



- La base è il gruppo di quattro atomi:
- La cella tratteggiata è la cella primitiva unitaria. I vettori primitivi sono segnati in figura come $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$.
- Ogni cella ha 4 atomi, corrispondenti alla base.
- Ogni cella ha 1 nodo reticolare.
- Cella di Wigner-Seitz:



(2) Reticolo esagonale 2D:



Il packing factor è definito come

$$PF = \frac{N_A \, Area_A}{Area_{cella}}$$, dove

N_A = numero di atomi nella cella scelta

$Area_A$ = area del singolo atomo

$Area_{cella}$ = area della cella scelta

Scegliendo la cella unitaria,

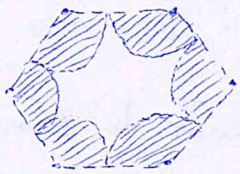
$N_A = 1$

$Area_A = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$Area\ cella = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$

$$\longrightarrow PF = \frac{1 \cdot \pi a^2/4}{a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.907$$

Nel caso di struttura a nido d'ape:

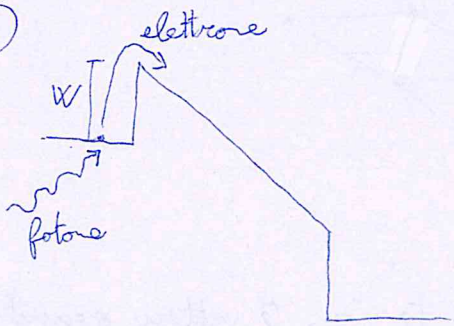


$$N_A = 2$$

$$\text{Area}_A = \pi \frac{a^2}{4} \longrightarrow PF = \frac{2 \cdot \pi a^2/4}{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.6$$

$$\text{Area}_{\text{cella}} = 3 \cdot \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$

3)



L'elettrone raggiunge l'anodo con una $\lambda_{\text{De Broglie}} = \frac{\lambda}{1000}$, quindi l'energia cinetica finale è $E_{\text{CIN FINALE}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_{DB}^2} = \frac{h^2 \cdot 10^6}{2m\lambda^2}$

L'elettrone ha un'energia cinetica iniziale

$$E_{\text{CIN INIZIALE}} = E_{\text{FOTONE}} - W = \frac{hc}{\lambda} - W$$

La conservazione dell'energia impone che, applicando $V_A = 30$ V,

$$E_{\text{CIN INIZIALE}} + qV_A = E_{\text{CIN FINALE}}$$

$$\frac{hc}{\lambda} - W + qV_A = \frac{h^2 \cdot 10^6}{2m\lambda^2}$$

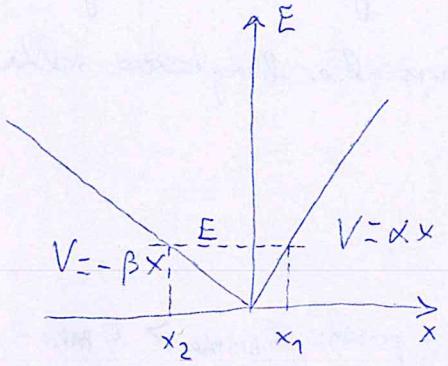
Risolvendo per λ, si trova

$$(qV_A - W)\lambda^2 + hc\lambda - \frac{h^2 \cdot 10^6}{2m} = 0$$

$$\lambda = 222 \text{ nm}$$

Il fotone incidente ha energia $E = \frac{hc}{\lambda} = 5.6$ eV

④



L'incertezza sulla quantità di moto è

$$\Delta p = \sqrt{2mE}$$

$$x_1 = \frac{E}{qF_1}$$ dove F_1 è il campo elettrico in x_1

$$x_2 = -\frac{E}{q|F_2|}$$

$$|F_1| = \frac{1}{q}\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| = \frac{\alpha}{q}$$

$$|F_2| = \frac{\beta}{q}$$

$$\Delta x = x_1 + |x_2| = \frac{Eq}{q\alpha} + \frac{Eq}{q\beta} = E\,\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

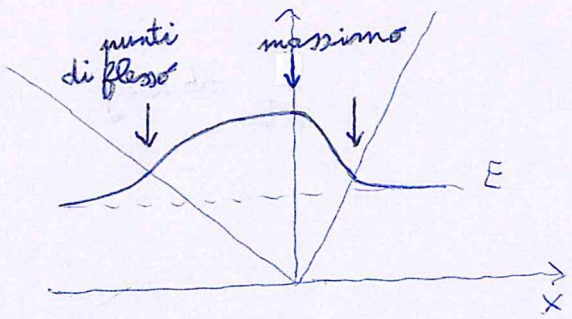
$$\Delta p\,\Delta x \cong \hbar$$

Quindi: $\sqrt{2mE}\;E\;\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \hbar$ $\qquad E^{3/2} = \dfrac{\hbar}{\alpha+\beta}\,\alpha\beta\,\dfrac{1}{\sqrt{2m}}$

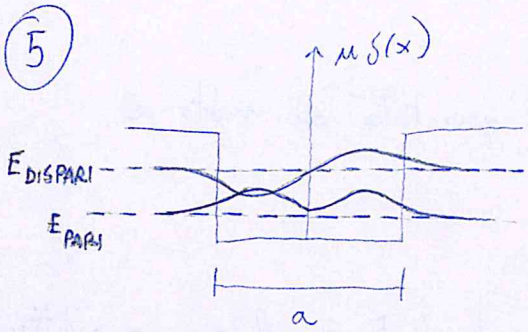
$$E = \left(\frac{\hbar}{\alpha+\beta}\,\alpha\beta\,\frac{1}{\sqrt{2m}}\right)^{2/3}$$

$E = 357$ meV

Andamento qualitativo:



5



Poiché la buca è larga a, la lunghezza d'onda è circa pari alla larghezza della buca. Quindi

$$\lambda_{PARI} = a + 0.01a$$

$$\lambda_{DISPARI} = a - 0.01a \quad , \text{poiché } E_{DISPARI} > E_{PARI}$$

Le corrispondenti energie sono

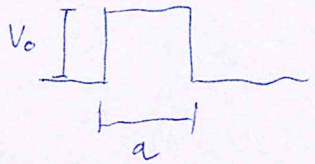
$$E_{PARI} = \frac{h^2}{2m\lambda_{PARI}^2} = \frac{h^2}{2m(a+0.01a)^2} = 72.9 \text{ meV}$$

$$E_{DISPARI} = \frac{h^2}{2m\lambda_{DISPARI}^2} = \frac{h^2}{2m(a-0.01a)^2} = 75.9 \text{ meV}$$

Quindi, il corrispondente pacchetto oscilla con una frequenza $\nu = \frac{\Delta E}{h} =$

$= 729.4$ GHz

(6)



$$T_1 = e^{-2\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}a}$$

Nel secondo caso

$$T_2 = e^{-2\int_0^a \frac{\sqrt{2m(V(x)-E)}}{\hbar}dx} = e^{-2\int_0^a \frac{\sqrt{2m(V_0+qFx-E)}}{\hbar}dx} =$$

Ponendo $y = V_0 + qFx - E$, $dy = qF\,dx$, trovo

$$= e^{-2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_{V_0-E}^{V_0+qFa-E}\sqrt{y}\,\frac{dy}{qF}} = e^{-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{q|V_A|\hbar}a\left[(V_0+q|V_A|-E)^{3/2}-(V_0-E)^{3/2}\right]}$$

(Sapendo che $|F| = \frac{|V_A|}{a}$)

Deve valere $T_2 = \frac{T_1}{100}$,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{e^{-\overbrace{\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{q|V_A|\hbar}}^{A}a\left[(V_0+q|V_A|-E)^{3/2}-(V_0-E)^{3/2}\right]}}{e^{-\underbrace{2\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}}_{B}a}} = \frac{1}{100} = e^{-Aa}\,e^{+Ba} =$$

$$= e^{a(B-A)}$$

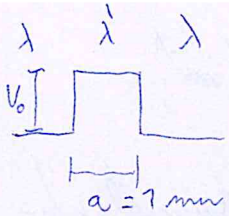
$$a(B-A) = \ln\frac{1}{100}$$

$$a = \frac{\ln 1/100}{B-A} = \frac{\ln 1/100}{+2\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} - \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{q|V_A|\hbar}\left[(V_0+q|V_A|-E)^{3/2}-(V_0-E)^{3/2}\right]} =$$

$$= 7.44\ nm$$

Per verifica, $a\cdot\alpha = 7.37 >> 1$, l'approssimazione è valida per T_1 e T_2.

7

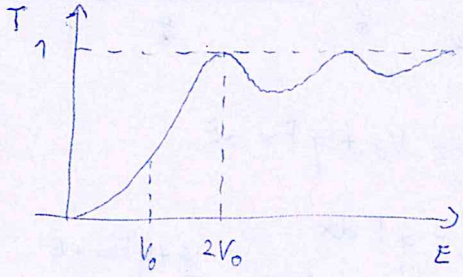


Affinché si abbia trasmissione totale è necessario che la lunghezza d'onda λ' dell'elettrone nella zona di barriera soddisfi $2a = n\lambda'$, $\lambda' = \frac{2a}{n}$. Il primo valore di energia per cui la trasmissione è totale corrisponde alla λ' massima, ossia $n = 1$.

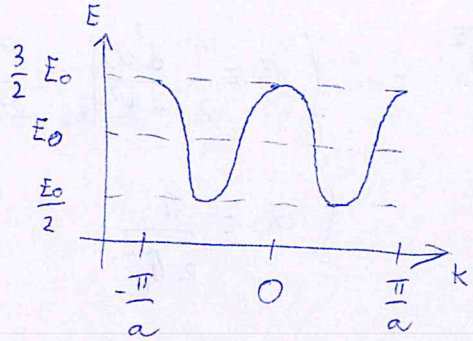
Quindi l'energia corrispondente è

$$E_1 = V_0 + \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} = V_0 + \frac{h^2}{2m\lambda'^2} = V_0 + \frac{h^2}{8ma^2} = 2V_0$$

$$V_0 = \frac{h^2}{8ma^2} = 377 \text{ meV}$$



(8)



$E_0 = 2\ eV$

$a = 0.5\ nm$

$$E = E_0 + \frac{E_0}{2}\cos(2ka)$$

$$E' = -\frac{2E_0 a}{2}\sin(2ka) = -E_0 a \sin(2ka)$$

$$E'' = -E_0 2a^2 \cos(2ka)$$

gli zeri di E'' sono $\begin{cases} 2ka = \pm\frac{\pi}{2} \\ 2ka = \pm\frac{3}{2}\pi \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} k = \pm\frac{\pi}{4a} \\ k = \pm\frac{3}{4}\frac{\pi}{a} \end{array}}$

Per $\begin{cases} -\frac{3}{4}\frac{\pi}{a} < k < -\frac{\pi}{4a} \\ \frac{\pi}{4a} < k < \frac{3}{4}\frac{\pi}{a} \end{cases}$, E'' è positivo, quindi $m^* = \frac{\hbar^2}{E''}$ è positiva

I minimi sono per $k = \pm\frac{\pi}{2a}$, $m^*\Big|_{k=\pm\frac{\pi}{2a}} = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk^2}\Big|_{k=\pm\frac{\pi}{2a}}} = \frac{\hbar^2}{+E_0 2a^2} = 0.076\ m_0$

I massimi sono per $k = 0, \pm\frac{\pi}{a}$, $m^*\Big|_{k=0,\pm\frac{\pi}{a}} = \frac{\hbar^2}{-E_0 2a^2} = -0.076\ m_0$

La massa efficace è infinita nei punti in cui si annulla $\frac{d^2E}{dk^2}$.

$\frac{d^2E}{dk^2} = -E_0 2a^2\cos(2ka) = 0$, i risultati sono quelli trovati prima,

$k = \pm\frac{\pi}{4a}$ $\quad k = \pm\frac{3}{4}\frac{\pi}{a}$

9)

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} = \frac{1}{\hbar}\left.\frac{dE}{dk}\right|_{k_0} \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2 t^2}{\alpha}} \quad \text{con} \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} = \frac{1}{2\hbar}\left.\frac{d^2E}{dk^2}\right|_{k_0} \\ \alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} \end{cases}$$

$$E = E_0 + \frac{E_0}{2}\cos(2ka)$$

$$E' = -E_0 a \sin(2ka) \qquad E'' = -2E_0 a^2 \cos(2ka)$$

$\boxed{t=0}$

$$v_g = \frac{1}{\hbar}\left(-E_0 a \sin(2k_0 a)\right) = -\frac{E_0 a}{\hbar}\sin(\pi) = 0 \ \frac{m}{s}$$ Particella ferma

$$v_F = \left.\frac{\omega}{k}\right|_{k_0} = \left.\frac{E(k)}{\hbar k}\right|_{k_0} = \frac{E_0 + \frac{E_0}{2}\cos(2k_0 a)}{\hbar k_0} =$$

$$= \frac{E_0 \cancel{2\pi} a}{2\hbar \cancel{2\pi}} = \frac{E_0}{2\hbar} = 1.2 \cdot 10^5 \ \frac{m}{s}$$

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} = 5 \cdot 10^{-17} \ m^2$$

$$\beta = \frac{1}{2\hbar}\left(-2E_0 a^2 \cos(\pi)\right) = +\frac{E_0 a^2}{\hbar} = 7.59 \cdot 10^{-4} \ \frac{m^2}{s}$$

$$\sigma_x(0) = \sqrt{\alpha} = 7.07 \cdot 10^{-9} \ m$$

$\boxed{t = 1\,ps}$

$$v_g = 0 \ \frac{m}{s}$$

$$v_F = 1.2 \cdot 10^5 \ \frac{m}{s}$$

$$\sigma_x(1\,ps) = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2 t^2}{\alpha}} = 1.076 \cdot 10^{-7} \ m$$

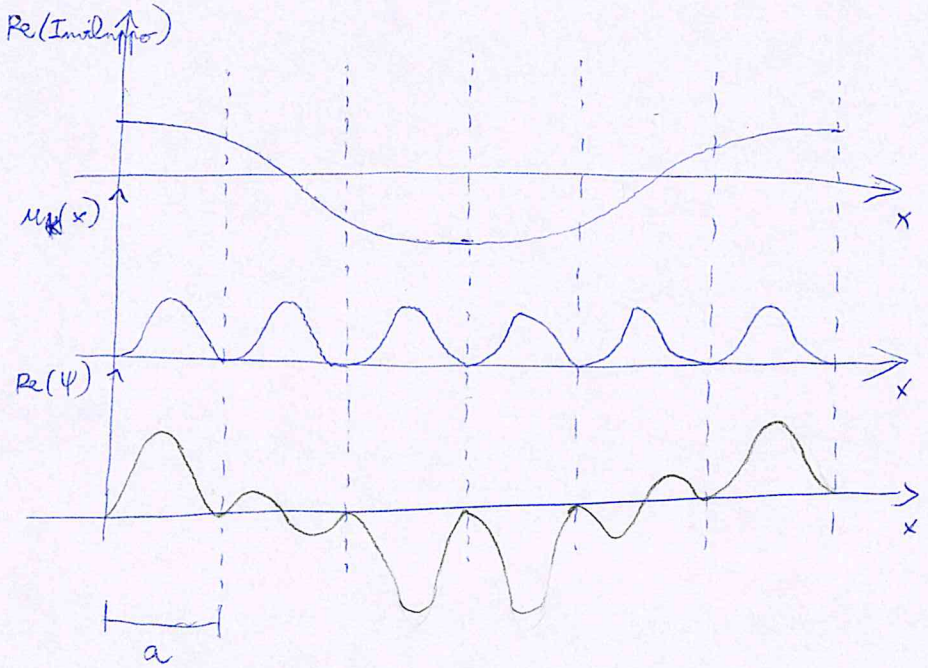
$\boxed{t = 1\,ns}$

$$v_g = 0 \ \frac{m}{s} \qquad v_F = 1.2 \cdot 10^5 \ \frac{m}{s} \qquad \sigma_x(1\,ns) = 1.07 \cdot 10^{-4} \ m$$

(10)

Per il teorema di Bloch: $\psi(x) = e^{ikx} u_k(x)$

La $\psi(x)$ compie uno sfasamento di 2π per 6 passi reticolari, quindi $k \cdot 6a = 2\pi$, da cui $a = \frac{2\pi}{6k} = \frac{\pi}{3k} = 3.5$ Å



Il grafico si ripete per le successive 6 celle per un totale di 12 celle (due periodi della funzione inviluppo).