

1. Si spieghi perché la struttura 2D in Fig. 1 non è un reticolo di Bravais, indicando il corrispondente reticolo di Bravais e la corrispondente base. Disegnare una cella unitaria primitiva e una relativa coppia di vettori primitivi. Quanti atomi per cella sono presenti? Quanti nodi reticolari? Disegnare infine la cella di Wigner-Seitz.
2. Determinare il fattore d'impaccamento (packing factor) del reticolo esagonale 2D e della struttura a nido d'ape in Fig. 2.
3. In un esperimento sull'effetto fotoelettrico, un catodo in oro ( $W = 5.1$  eV) viene irraggiato con un laser di lunghezza d'onda  $\lambda$ . Sapendo che i fotoelettroni accelerati con una tensione di 30 V raggiungono l'anodo con una lunghezza d'onda di DeBroglie pari a  $\lambda/1000$ , determinare l'energia del fotone incidente sul catodo.
4. Si consideri la buca triangolare di Fig. 3. Mediante il principio di indeterminazione, si stimi l'energia del livello fondamentale ( $\alpha = 2\beta = 3.2$  eV/nm). Tracciare l'andamento qualitativo della parte reale della corrispondente autofunzione.
5. Si consideri la doppia buca di potenziale in Fig. 4. Tracciare l'andamento qualitativo delle autofunzioni nei 2 autostati a minore energia. Sapendo che le lunghezze d'onda associate a queste 2 autofunzioni differiscono del 2%, stimare la frequenza di oscillazione dello stato non-stazionario ottenuto combinando linearmente le funzioni d'onda dei 2 autostati.
6. Un fascio elettronico di flusso  $\phi_i = 10^{20} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$  viaggia da sinistra verso la barriera di potenziale in Fig. 5a con energia  $E = 2$  eV e flusso trasmesso  $\phi_t$ . Dopo l'applicazione di una tensione  $V_A = -1.5$  V (Fig. 5b), il flusso trasmesso  $\phi_t'$  si riduce di un fattore 100 ( $\phi_t' = \phi_t/100$ ). Calcolare lo spessore di barriera  $a$ .
7. Si consideri un elettrone che supera una barriera rettangolare di spessore  $a = 1$  nm e altezza  $V_0$ . Determinare  $V_0$ , sapendo che la minima energia per cui la trasmissione è totale è  $E = 2V_0$ .
8. Si consideri la relazione di dispersione  $E(k) = E_0 + \frac{E_0}{2} \cos(2ka)$ , con  $E_0 = 2$  eV e  $a = 0.5$  nm. Ponendosi nella prima zona di Brillouin, calcolare per quali intervalli di  $k$  la massa efficace  $m^*$  è positiva. Calcolare  $m^*$  nei punti di minimo e di massimo. Calcolare per quali valori di  $k$  la massa efficace è infinita.
9. Si consideri la relazione di dispersione dell'esercizio precedente. Si costruisca un pacchetto d'onda centrato in  $k_0 = \frac{\pi}{2a}$  con peso  $g(k)$  gaussiano di deviazione standard  $\sigma_k = 10^8 \text{ m}^{-1}$ . Valutare la velocità di gruppo, la dispersione del pacchetto e la velocità di fase per i tempi  $t = 0, 1$  ps, 1 ns.
10. Un elettrone in un cristallo è descritto da un'autofunzione  $\psi_k(x)$  con  $k = 3 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$ . Sapendo che sono necessari 6 passi reticolari affinché l'autofunzione  $\psi_k(x)$  ritorni in fase, calcolare il passo reticolare  $a$ . Tracciare infine il profilo della parte reale della funzione involuppo e il profilo della parte reale dell'autofunzione su 12 passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

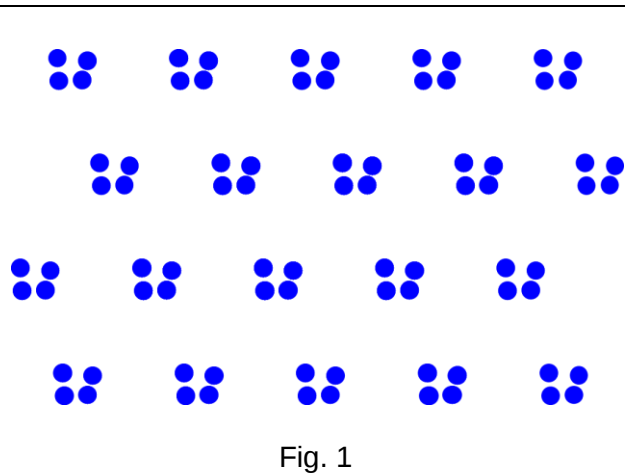


Fig. 1

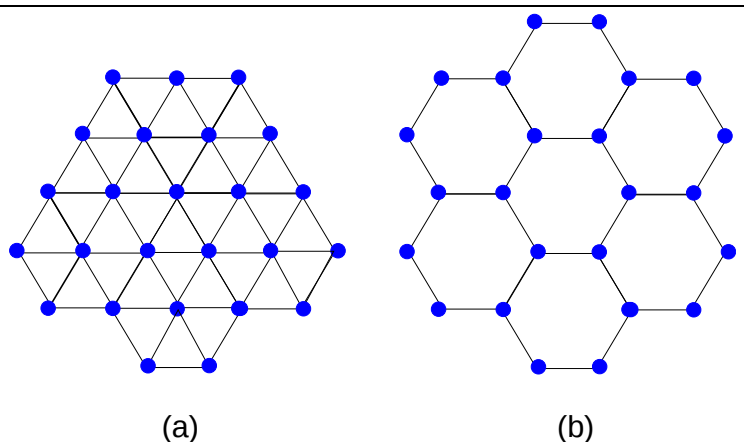


Fig. 2

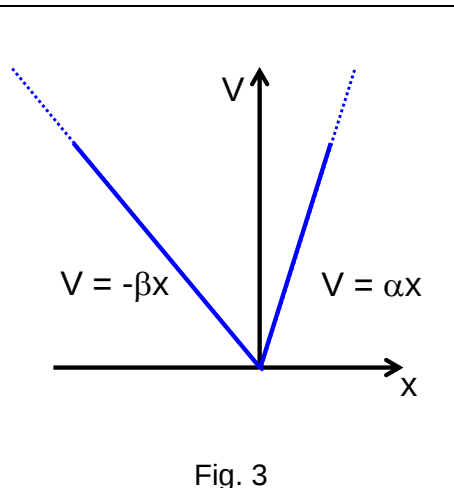


Fig. 3

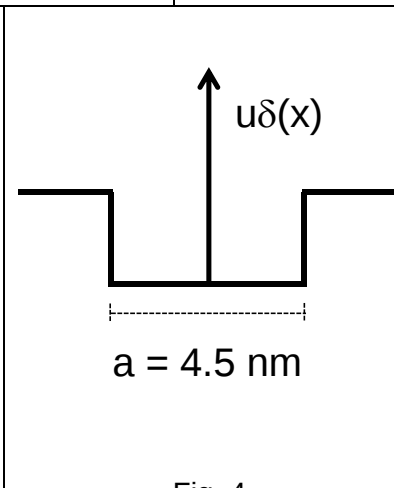


Fig. 4

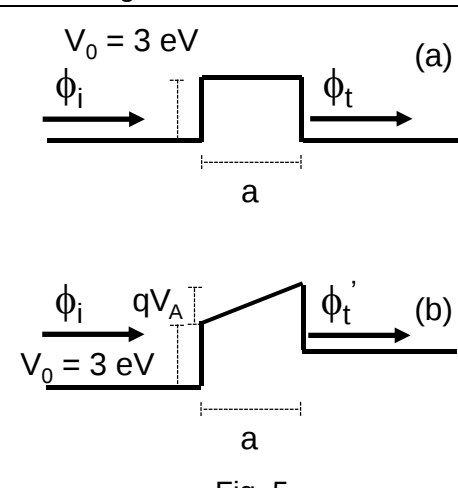


Fig. 5

1. Explain why the 2D structure in Fig. 1 is not a Bravais lattice, showing the corresponding Bravais lattice and corresponding basis. Draw a unit cell and the corresponding unit vectors. How many atoms are included in one cell? How many lattice nodes? Finally, draw the Wigner-Seitz cell.
2. Determine the packing factor in the 2D hexagonal lattice and in the honeycomb structure in Fig. 2.
3. In an experiment on the photoelectric effect, a gold (Au) cathode ( $W = 5.1$  eV) is irradiated with a laser of wavelength  $\lambda$ . Knowing that photoelectrons are accelerated with a voltage of 30 V and reach the anode with a DeBroglie wavelength  $\lambda/1000$ , calculate the energy of the laser photon irradiating the cathode.
4. Consider the triangular well in Fig. 3. Using the uncertainty principle, estimate the eigenvalue of the ground state ( $\alpha = 2\beta = 3.2$  eV/nm). Draw the qualitative behavior of the real part of the corresponding eigenfunction.
5. Consider the potential double well in Fig. 4. Draw the qualitative behavior of the eigenfunctions of the 2 eigenstates with lower energy. Knowing that the wavelengths of these 2 eigenfunctions differ by 2%, estimate the oscillation frequency of the non-stationary state obtained by linear combination of the wavefunctions of the 2 eigenstates.
6. An electron beam with incident flux  $\phi_i = 10^{20} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  travels from the left toward the potential barrier in Fig. 5a with energy  $E = 2$  eV and transmitted flux  $\phi_t$ . After application of a voltage  $V_A = -1.5$  V (Fig. 5b), the transmitted flux  $\phi_t'$  is reduced by a factor 100 ( $\phi_t' = \phi_t/100$ ). Calculate the barrier thickness  $a$ .
7. Consider an electron travelling through a rectangular potential barrier with thickness  $a = 1$  nm and height  $V_0$ . Calculate  $V_0$ , knowing that the minimum energy for which there is total transmission is  $E = 2V_0$ .
8. Consider the dispersion relationship  $E(k) = E_0 + \frac{E_0}{2} \cos(2ka)$ , with  $E_0 = 2$  eV and  $a = 0.5$  nm. Within the first Brillouin zone, indicate the  $k$  range where the effective mass  $m^*$  is positive. Calculate  $m^*$  in the minima and maxima of  $E(k)$ . Calculate the values of  $k$  where the effective mass is infinite.
9. Consider the dispersion relationship in the previous experiment. Build the wavepacket centered in  $k_0 = \frac{\pi}{2a}$  and a gaussian weight  $g(k)$  with standard deviation  $\sigma_k = 10^8 \text{ m}^{-1}$ . Calculate the group velocity, the packet dispersion and the phase velocity at  $t = 0$ , 1 ps, 1 ns.
10. An electron in a crystal is described by the eigenfunction  $\psi_k(x)$  with  $k = 3 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$ . Knowing that it takes 6 lattice parameters for the eigenfunction  $\psi_k(x)$  to regain its phase, calculate the lattice parameter  $a$ . Draw the real part of the envelope function and of the eigenfunction over 12 lattice parameters, knowing that the Bloch function is even and features a single maximum in correspondence of each atom.

**Costanti fisiche:**

massa dell'elettrone  
 costante di Planck  
 carica elettronica  
 costante di Boltzmann  
 velocità della luce  
 costante dielettrica nel vuoto  
 costante di Stephan-Boltzmann  
 costante di Wien

$m_0 = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$   
 $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$   
 $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   
 $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$   
 $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$   
 $\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$   
 $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$   
 $c_W = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ K m}$