#### Elettronica dello Stato Solido Lezione 14: Equazioni del trasporto



Daniele Ielmini

DEIB – Politecnico di Milano

daniele.ielmini@polimi.it

# Outline

- Introduzione
- Modello drift diffusion
- Equazioni di continuità
- Equazioni di diffusione dei minoritari
- Generazione ricombinazione
- Conclusioni

#### Introduzione

- Obiettivo: impostare il problema del trasporto in un dispositivo a semiconduttore, in presenza di:
  - Tensioni, quindi campi elettrici
  - Gradienti di concentrazione
  - Effetti di generazione, ricombinazione, iniezione (non equilibrio)

#### Stato stazionario

- Corrente di elettroni:  $j_n = qn\mu_n F + qD_n \frac{dn}{dx}$
- Corrente di lacune:  $j_{p} = qp\mu_{p}F qD_{p}\frac{dp}{dx}$
- Corrente totale a stato stazionario:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_n + \boldsymbol{j}_p = \boldsymbol{q} \boldsymbol{n} \mu_n \boldsymbol{F} + \boldsymbol{q} \boldsymbol{D}_n \frac{d\boldsymbol{n}}{d\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{q} \boldsymbol{p} \mu_p \boldsymbol{F} - \boldsymbol{q} \boldsymbol{D}_p \frac{d\boldsymbol{p}}{d\boldsymbol{x}}$$

#### Stato transitorio

- Corrente di spostamento:  $\mathbf{j}_{D} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
- Non si tratta di corrente di particelle, ma è legata alla variazione della polarizzazione del mezzo → importante nei dielettrici e nella regione svuotata del semiconduttore
- Corrente totale nel transitorio:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_n + \boldsymbol{j}_p + \boldsymbol{j}_D$$

# Livelli di quasi-Fermi

 Livelli di quasi-Fermi = livelli di energia F<sub>n</sub>, F<sub>p</sub> che soddisfano le condizioni:



- Nota: il livello di Fermi è a rigore definito solo all'equilibrio, dove i quasi Fermi coincidono con il Fermi  $E_F = F_n = F_p$
- In condizioni di fuori equilibrio (fotogenerazione, alti campi, forte iniezione, etc.) il livello di Fermi perde di senso e viene sostituito dal livello di quasi Fermi D. lelmini – Elettronica dello Stato Solido 14

# Esempio

- a) Semiconduttore n con n =  $N_D = 10^{16}$  cm<sup>-3</sup>, equilibrio (e.g. n<sub>i</sub> =  $10^{10}$  cm<sup>-3</sup>  $\rightarrow$  p =  $10^4$  cm<sup>-3</sup>)
- b) Lo stesso semiconduttore n a seguito di fotogenerazione con n' = p' =  $10^{14}$  cm<sup>-3</sup>
- c) Lo stesso semiconduttore n a seguito di fotogenerazione con n' = p' =  $10^{18}$  cm<sup>-3</sup>



#### Equazioni di corrente con F<sub>n</sub>, F<sub>p</sub>

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}n_i e^{-\frac{F_p - E_i}{kT}} = \frac{n_i}{kT} e^{-\frac{F_p - E_i}{kT}} \left(\frac{dE_i}{dx} - \frac{dF_p}{dx}\right) = \frac{qp}{kT}F - \frac{p}{kT}\frac{dF_p}{dx}$$

$$j_{p} = qp\mu_{p}F - qD_{p}\frac{dp}{dx} = qp\mu_{p}F - qD_{p}\frac{qp}{kT}F + qD_{p}\frac{p}{kT}\frac{dF_{p}}{dx}$$
$$j_{p} = \mu_{p}p\frac{dF_{p}}{dx}$$
$$j_{n} = \mu_{n}n\frac{dF_{n}}{dx}$$

•  $F_p$ ,  $F_n$  da sostituire con  $E_F$  in caso di equilibrio

#### Equazioni di continuità



- Con generazione/ricombinazione:  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{1}{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{j}_{p}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{g}_{p} \mathbf{r}_{p}$
- Per gli elettroni:

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{t}} d\boldsymbol{x} = -\frac{1}{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\boldsymbol{q}} \frac{\partial \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{1}{\boldsymbol{q}} \frac{\partial \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}}$$

# Diffusione di minoritari

- Sotto alcune ipotesi aggiuntive, è possibile dare all'equazione di continuità per i minoritari (n<sub>p</sub> o p<sub>n</sub>) una forma più specifica:
  - F≈0 nella regione di interesse
  - Concentrazioni minoritari all'equilibrio  $n_0(x)$  e  $p_0(x)$  sono uniformi (indipendenti da x)
  - Iniezione di basso livello: n<sub>p</sub>'<<N<sub>A</sub> e p<sub>n</sub>'<<N<sub>D</sub> dove n<sub>p</sub>' e p<sub>n</sub>' sono le concentrazione di elettroni e lacune minoritari in eccesso rispetto alla concentrazione di equilibrio, e.g. causato da effetti di fotogenerazione

#### Equazione di diffusione minoritari

- Ipotesi: elettroni minoritari in semiconduttore p
- Trascuriamo la componente di deriva perché n<sub>p</sub> piccolo (minoritari) e F≈0 (nota: lo stesso non si può dire per i maggioritari!)

$$\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}}\,\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}}\,\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial\boldsymbol{x}}$$

- Quindi:  $\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + g_n r_n$
- Inoltre n=n<sub>0</sub>+n', con n<sub>0</sub> indipendente da x e t:

$$\frac{\partial \mathbf{n'}}{\partial t} = \mathbf{D}_n \frac{\partial^2 \mathbf{n'}}{\partial \mathbf{x}^2} + \mathbf{g}_n - \mathbf{r}_n \text{ (II legge di Fick)}$$

#### Equazione di diffusione minoritari

 Infine scriviamo la ricombinazione come r<sub>n</sub>=n'/τ<sub>n</sub>, con τ<sub>n</sub> = tempo di ricombinazione dei minoritari (da giustificare più avanti), quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{n'_p}}{\partial t} = \mathbf{D_n} \frac{\partial^2 \mathbf{n'_p}}{\partial \mathbf{x}^2} + \mathbf{g_n} - \frac{\mathbf{n'_p}}{\tau_n}$$

• Idem per le lacune:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p'}_n}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{p}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{p'}_n}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{p}} - \frac{\boldsymbol{p'}_n}{\tau_{\boldsymbol{p}}}$$

# Esempio 1: stazionario disuniforme $n'_{n_G}$

- Barretta di semiconduttore p irraggiato su un lato, in modo che n'(0) = n'<sub>G</sub> = costante nel tempo. Qual è il profilo stazionario di minoritari?
- $\partial n' / \partial t = 0$  (stazionario)
- g<sub>n</sub> = 0 (fotogenerazione solo in superficie)

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}'}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{\boldsymbol{n}'}{\tau_{\boldsymbol{n}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}'}{\partial \boldsymbol{x}^2} = \frac{\boldsymbol{n}'}{\tau_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}}} = \frac{\boldsymbol{n}'}{\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}^2}$$

# Esempio 1: stazionario disuniforme



- $L_n = (D_n \tau_n)^{1/2} = distanza di ricombinazione,$ rappresenta la spazio mediamente percorsodal portatore minoritario prima di ricombinare
- Soluzione:  $n'(x) = Ae^{\frac{x}{L_n}} + Be^{-\frac{x}{L_n}}$
- Condizioni al contorno: n'(0) = n<sub>G</sub> e n'(∞) = finito, pertanto:

$$\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}'_{\mathsf{G}} e^{-\overline{L_n}}$$

# Esempio 2: transitorio uniforme

222222222222

- Barretta di semiconduttore p irraggiato fino a t=0, caratterizzato da un eccesso uniforme n'<sub>G</sub>
- All'istante t=0 la sorgente di generazione viene spenta: qual è l'evoluzione della concentrazione di minoritari?
- $\partial^2 n' / \partial x^2 = 0$  (profilo uniforme)

n'

•  $g_n = 0$  (generazione spenta per t>0)  $\frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{n'}{\tau_n} \longrightarrow n'(t) = n'_G e^{-\frac{t}{\tau_n}}$ D. lelmini – Elettronica dello Stato Solido 14

# Esempio 3: transitorio disuniforme

- Barretta di semiconduttore p irraggiata con un impulso in t = 0, x=0 in modo da creare una delta di minoritari in eccesso, numero totale  $N'_{g} = \int_{0}^{+\infty} n'(x,0) dx = \int_{0}^{+\infty} N'_{g} \delta(x) dx =$
- Evoluzione per t>0?
- $g_n = 0$  (generazione spenta per t>0)  $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{dj_n}{dx} + g_n - r_n$

# **Esempio 3: soluzione** $\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{1}{\boldsymbol{q}} \frac{\boldsymbol{d} \boldsymbol{j}_n}{\boldsymbol{d} \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_n - \boldsymbol{r}_n = \frac{1}{\boldsymbol{a}} \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d} \boldsymbol{x}} \left( \boldsymbol{q} \boldsymbol{D}_n \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{q} \boldsymbol{\mu}_n \boldsymbol{n} \boldsymbol{F} \right) + \boldsymbol{g}_n - \boldsymbol{r}_n$ $= \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{x}^{2}} + \mu_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{F} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{x}} + \mu_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{n} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}} - \frac{\boldsymbol{n}'}{\tau_{\boldsymbol{n}}}$ $\frac{\partial \boldsymbol{n}'}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}'}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \mu_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{F} \frac{\partial \boldsymbol{n}'}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\boldsymbol{n}'}{\tau}$ • La soluzione è del tipo: $n'(x,t) = n''(x,t)e^{-\frac{t}{\tau_n}}$ • Sostituendo: $\frac{\partial n''}{\partial t}e^{\frac{t}{\tau_n}} - \frac{n'}{\tau_n} = D_n \frac{\partial^2 n''}{\partial x^2}e^{\frac{t}{\tau_n}} + \mu_n F \frac{\partial n''}{\partial x}e^{-\frac{t}{\tau_n}} - \frac{n'}{\tau_n}$

 $\frac{\partial \boldsymbol{n}^{"}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}} \frac{\partial^{2} \boldsymbol{n}^{"}}{\partial \boldsymbol{x}^{2}} + \mu_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{F} \frac{\partial \boldsymbol{n}^{"}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 

# Esempio 3: soluzione

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^{"}}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{n}^{"}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \mu_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{F} \frac{\partial \boldsymbol{n}^{"}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

 La soluzione che si ottiene (metodo della trasformata di Laplace) è:

$$\boldsymbol{n}''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{N'}_{\boldsymbol{G}}}{\sqrt{4\pi\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}}} \boldsymbol{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x}+\mu_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{t})^2}{4\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}}}$$

• E quindi:

$$\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{N'}_{G} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\tau_{n}}}}{\sqrt{4\pi \boldsymbol{D}_{n} \boldsymbol{t}}} \boldsymbol{e}^{-\frac{(\boldsymbol{x}+\mu_{n} \boldsymbol{F} \boldsymbol{t})^{2}}{4\boldsymbol{D}_{n} \boldsymbol{t}}}$$

#### Soluzione per F=0



#### Soluzione per F applicato



# Outline

- Introduzione
- Modello drift diffusion
- Equazioni di continuità
- Equazioni di diffusione dei minoritari
- <u>Generazione ricombinazione</u>
- Conclusioni

#### Equazioni di continuità

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = -\frac{1}{\boldsymbol{q}} \frac{\boldsymbol{d} \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{d} \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{p}} \qquad \qquad \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} = \frac{1}{\boldsymbol{q}} \frac{\boldsymbol{d} \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{d} \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}}$$

- Il rate di variazione della concentrazione dall'equazione di continuità include:
  - Divergenza della corrente (drift + diffusione)
  - Tasso di generazione g<sub>n</sub>, g<sub>p</sub> (generazione termica, fotogenerazione, generazione ad alti campi)
  - Tasso di ricombinazione r<sub>n</sub>, r<sub>p</sub> (annihilazione elettrone lacuna)
- Quali sono i meccanismi fisici della G R?

#### Meccanismi di ricombinazione – 1



 $\dot{\mathsf{E}}_{\mathsf{D}}$ 

a) Banda – banda (radiativo)

b) Centro di ricombinazione
 'deep' (non radiativo)

 c) Accettore/donore
 'shallow' (radiativo – improbabile a temperature non troppo basse, alta ionizzazione)

#### Meccanismi di ricombinazione – 2



 d) Eccitone (libero o legato a sito donore/accettore, radiativo)

e) Ricombinazione Auger (processo a tre corpi, non radiativo)

# Eccitone

 Un elettrone in BC ed una lacuna in BV si legano con interazione coulombiana



Modello dell'idrogeno (come per lo stato donore):
 mg<sup>4</sup> m<sup>\*</sup><sub>ex</sub> / m<sub>0</sub>

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{mq}}{2(4\pi\varepsilon\hbar)^2} = \frac{\mathbf{m_{ex}} / \mathbf{m_0}}{\varepsilon^2} \mathbf{Ry}$$

dove m<sup>\*</sup><sub>ex</sub> = massà ridotta della coppia interagente:  $\frac{1}{m_{ex}^*} = \frac{1}{m_{ex}^*} + \frac{1}{m_{h}^*}$ 

con m\*<sub>e</sub>, m\*<sub>h</sub> = masse efficaci di conducibilità

Breve vita media (lifetime = 10<sup>-9</sup> s) prima di ricombinare

# Meccanismi di generazione



- a) Banda banda (fotogenerazione, generazione termica)
- b) Centro di generazione 'deep' (fotoemissione, generazione termica)
- c) lonizzazione ad impatto: elettrone 'caldo' rilassa in banda di conduzione generando coppia e-h

# Modello di Shockley-Hall-Read

- Nei dispositivi a semiconduttori il processo dominante di ricombinazione è normalmente quello a singolo centro (e.g. deep)
- II modello SHR permette di stimare il rate di G – R dal bilancio di quattro processi elementari:



D. lelmini – Elettronica dello Stato Solido 14

#### Cattura elettrone

• Il rate di cattura elettrone è dato da:

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{t}}\Big|_{ce} = -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n} \qquad [cm^{-3}s^{-1}]$$

dove

- $c_n [cm^3 s^{-1}] = coefficiente di cattura elettroni$
- p<sub>T</sub> [cm<sup>-3</sup>] = concentrazione di lacune intrappolate (siti disponibili per l'elettrone)
- n [cm<sup>-3</sup>] = concentrazione elettroni in banda (particelle disponibili alla cattura)
- Nota: il coefficiente di cattura è dato da  $c_n = \sigma_n v_{th}$ , prodotto della sezione d'urto di cattura (area efficace della trappola ai fini della cattura [cm<sup>2</sup>]) e velocità termica dell'elettrone [cms<sup>-1</sup>]

#### **Emissione elettrone**

• Il rate di emissione elettrone è dato da:

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial \boldsymbol{t}}\Big|_{ee} = \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{n}_T \boldsymbol{N}_c \qquad [cm^{-3}s^{-1}]$$

dove

- $-e_n [cm^3s^{-1}] = coefficiente di emissione elettroni$
- n<sub>T</sub> [cm<sup>-3</sup>] = concentrazione di elettroni
   intrappolati (siti disponibili per la lacuna)
- N<sub>C</sub> [cm<sup>-3</sup>] = densità di stati effettiva in banda di conduzione (gli stati sono generalmente quasi tutti disponibili)

#### Cattura/emissione lacuna

 Analogamente otteniamo il rate di cattura lacuna:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{t}}\Big|_{ch} = -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{p} \qquad [\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}]$$

dove

- $c_p [cm^3 s^{-1}] = coefficiente di cattura lacune$
- $n_T [cm^{-3}] = concentrazione di elettroni intrappolati$
- p [cm<sup>-3</sup>] = concentrazione lacune in banda
- E quello di emissione:

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{t}}\Big|_{\boldsymbol{e}\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{V}} \qquad [\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}]$$

dove

- $-e_p [cm^3s^{-1}] = coefficiente emissione lacune$
- $p_T [cm^{-3}] = concentrazione lacune intrappolate$
- N<sub>V</sub> [cm<sup>-3</sup>] = densità effettiva in banda di valenza
   D. lelmini Elettronica dello Stato Solido 14

# Rate complessivi

 Quindi i rate di ricombinazione netti, definiti come il tasso di scomparsa di elettroni dalla banda di conduzione e di lacune dalla banda di valenza, sono:

$$\boldsymbol{r}_{n} = -\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t}\Big|_{ce} -\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t}\Big|_{ee} = \boldsymbol{c}_{n}\boldsymbol{p}_{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_{n}\boldsymbol{n}_{T}\boldsymbol{N}_{C} \qquad [\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}]$$
$$\boldsymbol{r}_{p} = -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t}\Big|_{ch} -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t}\Big|_{eh} = \boldsymbol{c}_{p}\boldsymbol{n}_{T}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{e}_{p}\boldsymbol{p}_{T}\boldsymbol{N}_{V} \qquad [\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}]$$

 I rate sono positivi se c'è, al netto, ricombinazione – negativi se prevale la generazione
 D. lelmini – Elettronica dello Stato Solido 14

# Condizioni di equilibrio

- All'equilibrio (stato del sistema a temperatura costante, non disturbato da forze esterne e.g. campi elettrici e/o magnetici) vale il bilancio dettagliato: ogni processo fondamentale si bilancia perfettamente con il processo opposto, e.g. la cattura e l'emissione di elettroni si devono bilanciare ( $r_n = 0$ ), idem per le lacune ( $r_p = 0$ )
- È condizione sufficiente (ma non necessaria) per la stazionarietà
- Permette di risalire alla relazione fondamentale che lega i coefficienti di cattura ed emissione

# Bilancio dettagliato

• All'equilibrio dunque vale:

$$\mathbf{c}_n \mathbf{p}_T \mathbf{n} = \mathbf{e}_n \mathbf{n}_T \mathbf{N}_C \rightarrow \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{p}_T \mathbf{n}}{\mathbf{n}_T \mathbf{N}_C} \mathbf{c}_n = \alpha_1 \mathbf{c}_n$$

$$\mathbf{c}_{p}\mathbf{n}_{T}\mathbf{p} = \mathbf{e}_{p}\mathbf{p}_{T}\mathbf{N}_{V} \rightarrow \mathbf{e}_{p} = \frac{\mathbf{n}_{T}\mathbf{p}}{\mathbf{p}_{T}\mathbf{N}_{V}}\mathbf{c}_{p} = \beta_{1}\mathbf{c}_{p}$$

- Nota: stiamo assumendo che i coefficienti di cattura/emissione rimangano uguali al valore osservato all'equilibrio
- I tassi di ricombinazione allora diventano:

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}} \left( \boldsymbol{p}_{T} \boldsymbol{n} - \alpha_{1} \boldsymbol{N}_{C} \boldsymbol{n}_{T} \right)$$
$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{p}} \left( \boldsymbol{n}_{T} \boldsymbol{p} - \beta_{1} \boldsymbol{N}_{V} \boldsymbol{p}_{T} \right)$$

#### Proporzionalità cattura-emissione

• I coefficienti di proporzionalità sono:

$$\alpha_{1} = \frac{\boldsymbol{p}_{T}\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}_{T}\boldsymbol{N}_{c}} = \frac{(\boldsymbol{N}_{T} - \boldsymbol{n}_{T})}{\boldsymbol{n}_{T}} \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}_{c}} = \left(\frac{\boldsymbol{N}_{T}}{\boldsymbol{n}_{T}} - 1\right) \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}_{c}}$$
$$\beta_{1} = \frac{\boldsymbol{n}_{T}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}_{T}\boldsymbol{N}_{V}} = \frac{\boldsymbol{n}_{T}}{\boldsymbol{N}_{T} - \boldsymbol{n}_{T}} \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{N}_{V}} = \frac{1}{\left(\frac{\boldsymbol{N}_{T}}{\boldsymbol{n}_{T}} - 1\right)} \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{N}_{V}}$$

Ricordiamo che:

$$\frac{\boldsymbol{n}_{T}}{\boldsymbol{N}_{T}} = \frac{1}{\mathbf{e}^{\frac{\boldsymbol{E}_{T} - \boldsymbol{E}_{F}}{\boldsymbol{k}T}} + 1}$$

$$n = N_{c} e^{-\frac{E_{c}-E_{F}}{kT}}$$
$$p = N_{v} e^{\frac{E_{v}-E_{F}}{kT}}$$

#### Proporzionalità e intepretazione

• Quindi:  $\alpha_1 = \left(\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{E}_T - \mathbf{E}_F}{\mathbf{k}T}} + 1 - 1\right)\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_F}{\mathbf{k}T}} = \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{E}_c - \mathbf{E}_T}{\mathbf{k}T}}$ 

$$\beta_{1} = \frac{1}{\left(e^{\frac{E_{T}-E_{F}}{kT}}+1-1\right)}e^{\frac{E_{V}-E_{F}}{kT}} = e^{\frac{E_{V}-E_{T}}{kT}}$$
• Le relazioni:
$$e_{n} = e^{-\frac{E_{C}-E_{T}}{kT}}c_{n}$$

$$E_{C} - C = E_{T}$$

$$E_{V} - C = E_{T}$$

indicano che il coefficiente di emissione è uguale a quello di cattura moltiplicato per la probabilità di eccitazione termica dal livello di trappola  $E_T$  a quello di banda,  $E_C$  per elettroni e  $E_V$  per lacune, indipendente da  $E_F$ 

# Stato stazionario

- È definito come quello stato in cui tutte le grandezze (e.g. temperature, campi, concentrazioni di portatori liberi e intrappolati) sono invarianti nel tempo
- Differisce dallo stato di equilibrio (i.e. non vale il bilancio dettagliato), che è un particolare stato stazionario
- Lo stato (quasi) stazionario è generalmente invocato per la soluzione dei problemi di dispositivi a semiconduttore

#### Ricombinazione in stato stazionario

 La concentrazione di elettroni intrappolati non può variare nel tempo, quindi:



• Essendo  $p_T = N_T - n_T$ :

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\alpha}_{1}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\tau}}\right)=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{\rho}}\left(\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\rho}-\beta_{1}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{\tau}}+\beta_{1}\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\tau}}\right)$$

• Esplicitando n<sub>T</sub>:  $n_{\tau} = N_{\tau} \frac{c_n n + c_p \beta_1 N_V}{c_p p + c_p \beta_1 N_V + c_n n + c_n \alpha_1 N_C}$ 

#### Ricombinazione in stato stazionario

- Definiamo n<sub>1</sub> e p<sub>1</sub> come:  $n_1 = \alpha_1 N_c = N_c e^{-\frac{E_c - E_T}{kT}}$  $p_1 = \beta_1 N_V = N_V e^{\frac{E_V - E_T}{kT}}$
- Cioè n<sub>1</sub> e p<sub>1</sub> sarebbero le concentrazioni di elettroni e lacune se E<sub>F</sub> coincidesse con E<sub>T</sub>. Otteniamo la formula semplificata:

$$\boldsymbol{n}_{\tau} = \boldsymbol{N}_{\tau} \frac{\boldsymbol{c}_{n}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{c}_{p}\boldsymbol{p}_{1}}{\boldsymbol{c}_{p}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{c}_{p}\boldsymbol{p}_{1} + \boldsymbol{c}_{n}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{c}_{n}\boldsymbol{n}_{1}}$$

• Che sostituiamo in  $r_n$  (=  $r_p$ ) definito come R:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{c}_n \left( (\boldsymbol{N}_T - \boldsymbol{n}_T) \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{n}_T \right) = \dots$$

# Formula di SHR

- Dopo alcuni passaggi si ottiene:  $R = \frac{np - n_i^2}{\frac{n + n_1}{c_n N_T} + \frac{p + p_1}{c_n N_T}}$
- Possiamo ora definire i tempi di ricombinazione dei minoritari:
- Per ottenere infine:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{n}_i^2}{\tau_{\boldsymbol{p}} \left(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}_1\right) + \tau_{\boldsymbol{n}} \left(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}_1\right)}$$

 $\tau_n = \frac{1}{\boldsymbol{c}_n \boldsymbol{N}_{\tau}}$ 

 $\tau_{p} = \frac{1}{\boldsymbol{c}_{p} \boldsymbol{N}_{\tau}}$ 

• Significato:

 $-np > n_i^2 \rightarrow R>0$  (prevale la ricombinazione)

 $-np < n_i^2 \rightarrow R<0$  (prevale la generazione)

D. lelmini – Elettronica dello Stato Solido 14

[S]

[S]

# Limite di bassa iniezione

- La formula di SHR dà il tasso di G R in caso di non-equilibrio (np ≠ n<sub>i</sub><sup>2</sup>), questo può essere dovuto a fotogenerazione (irraggiamento laser) o iniezione di portatori indotta dal campo (e.g. nei pressi della zona svuotata in un diodo, oppure nella base di un transistore bipolare), etc.
- La condizione di bassa iniezione è una sorta di leggero non-equilibrio dove l'eccesso di portatori è trascurabile rispetto alla concentrazione di maggioritari:
  - -n', p' <<  $n_0$  in semiconduttore n
  - -n', p' >> p<sub>0</sub> in semiconduttore p

# SHR – bassa iniezione

• Ipotizzando anche che  $E_T$  sia sufficientemente prossimo al livello intrinseco in modo che  $n_1 \approx p_1 \approx n_i$ , la formula di SHR in condizione di bassa iniezione diventa:

$$\mathbf{R} \approx \frac{(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}')(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}') - \mathbf{n}_i^2}{\tau_p \left(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}' + \mathbf{n}_i\right) + \tau_n \left(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}' + \mathbf{p}_i\right)} = \frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{p}_0 + \mathbf{n}' \mathbf{p}_0 + \mathbf{n}_0 \mathbf{p}' + \mathbf{n}' \mathbf{p}' - \mathbf{n}_i^2}{\tau_p \left(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}' + \mathbf{n}_i\right) + \tau_n \left(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}' + \mathbf{p}_i\right)}$$

• Assumiamo che si tratti di semiconduttore n:

$$\boldsymbol{R} \approx \frac{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{p}_{0} + \boldsymbol{n}_{0}\boldsymbol{p}'}{\tau_{\boldsymbol{p}}\left(\boldsymbol{n}_{0} + \boldsymbol{n}' + \boldsymbol{p}'_{i}\right) + \tau_{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{p}_{0} + \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}_{i}\right)} \approx \frac{\boldsymbol{n}_{0}\boldsymbol{p}'}{\tau_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{n}_{0}} \approx \frac{\boldsymbol{p}'}{\tau_{\boldsymbol{p}}}$$
• Per semiconductore p: 
$$\boldsymbol{R} \approx \frac{\boldsymbol{n}'}{\tau_{\boldsymbol{p}}}$$

# Nota

- La formula di ricombinazione semplificata (e.g.  $r_n = n'/\tau_n$  per semiconduttore p) è quella utilizzata nell'equazione di diffusione dei minoritari
- La cinetica è del primo ordine (R ∝ n') perché il processo è ad un corpo (sequenza alternata di catture elettrone e lacuna)
- Nel caso di ricombinazione banda-banda, la cinetica è del secondo ordine R  $\propto$  n'p' (meccanismo a due corpi elettrone lacuna)
- Nel caso di ricombinazione Auger la cinetica è del terz'ordine R  $\propto$  n'<sup>2</sup>p' (meccanismo a tre corpi elettrone-lacuna-elettrone)

# Conclusioni

- Le formule analitiche per i flussi di drift e diffusione permettono di ricavare equazioni descrittive del bilancio di portatori nei semiconduttori (equazione di continuità, equazione di diffusione minoritari)
- Modello di SHR permette di dare semplice forma analitica al tasso di ricombinazione