Esercizio 1

Perché possa essere indotto l'effetto fotoelettrico, l'energia del fotone entrante deve essere maggiore della funzione lavoro del metallo. Deve quindi valere:

$$\frac{hc}{\lambda} > W$$

Pertanto $\lambda < \frac{hc}{W} = \lambda_{max} = \frac{(6.626 \cdot 10^{-34} Js) \cdot (3 \cdot 10^8 \frac{m}{s})}{4.33 \cdot (1.602 \cdot 10^{-19}\ C)} = 286.56\ nm.$

In presenza di irraggiamento a $\lambda = 220\ nm$, viene indotto effetto fotoelettrico essendo $220\ nm < \lambda_{max}$. La tensione di stop è data da:

$$V_{stop} = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{1}{q}\left(\frac{hc}{222\ nm} - 4.33\ eV\right) = 1.259\ V$$

Irraggiando a $\lambda = 300\ nm$, non viene indotto effetto fotoelettrico essendo $300\ nm > \lambda_{max}$.

La differenza di energia fra il fotone entrante e la funzione lavoro del metallo determina l'energia cinetica iniziale dell'elettrone. Conseguentemente:

$$K_0 = \frac{hc}{\lambda} - W = qV_{stop} = 1.259\ eV$$

Ricordando che $K = \frac{1}{2}mv^2$, e che fra gli elettrodi l'energia diminuisce linearmente con la distanza e proporzionalmente alla tensione applicata (in questo caso, V_{stop}), si impone il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{hc}{\lambda} - W \\ \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{hc}{\lambda} - W - qV_{stop}\left(\frac{x}{L}\right) \end{cases}$$

dove L è la distanza fra gli elettrodi. Si risolve il sistema ad es. sostituendo (1) in (2):

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{hc}{\lambda} - W\right) = \left(\frac{hc}{\lambda} - W\right) - qV_{stop}\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$qV_{stop}\left(\frac{x}{L}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{hc}{\lambda} - W\right)$$

$$\frac{x}{L} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{hc}{\lambda} - W}{qV_{stop}} = \frac{3}{4}$$

Esercizio 2

Ricordando il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$$

Sostituendo a $\Delta p_x = m_e \Delta v_x = m_e\left(0.015 \cdot 3 \cdot 10^7\ \frac{m}{s}\right)$, si ottiene $\Delta x = 2.57$ Å.

Esercizio 3

Nell'approssimazione di Maxwell-Boltzmann, la popolazione n_j del j-esimo stato energetico E_j può essere scritta:

$$n_j = e^{-\frac{E_j - E_F}{kT}}$$

Per gli stati E_1, E_3 vale quindi:

$$n_1 = e^{-\frac{E_1 - E_F}{kT}}$$

$$n_3 = e^{-\frac{E_3 - E_F}{kT}}$$

Il testo fornisce il valore del rapporto $\frac{n_3}{n_1} = 10^{-5}$ alla temperatura T = 400 K. Sviluppando l'espressione si ottiene la distanza fra i due livelli energetici:

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{e^{-\frac{E_3 - E_F}{kT}}}{e^{-\frac{E_1 - E_F}{kT}}} = e^{\frac{(E_1 - E_3)}{kT}}$$

$$\Delta E_{1,3} = E_3 - E_1 = -kT \ln(10^{-5}) = 0.397\, eV$$

Nell'approssimazione di buca a pareti infinite, l'energia del j-esimo stato energetico è data da.

$$E_j = \frac{h^2}{8ma^2} j^2$$

Pertanto:

$$\Delta E_{1,3} = E_3 - E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}(9-1) = \frac{h^2}{ma^2}$$

Uguagliando le espressioni per $\Delta E_{1,3}$ si ricava pertanto la larghezza della buca:

$$a = \sqrt{\frac{h^2}{m \Delta E_{1,3}}} = 2.75\, nm$$

Esercizio 4

L'energia del fascio di elettroni è data da:

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda_e^2} = 2.35\, eV$$

Per la barriera in figura, la probabilità di tunneling totale è data dal prodotto fra la probabilità attraverso la prima semibarriera e la seconda semibarriera. Entrambe sono esempi di tunneling di Fowler-Nordheim:

$$P_{tun} = P_1 \cdot P_2 = e^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{\hbar W}\cdot\frac{b}{2}\cdot(W-E)^2} \cdot e^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{\hbar W}\cdot\frac{b}{2}\cdot(W-E)^2} = e^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{\hbar W}\cdot b\cdot(W-E)^2} = 10^{-7}$$

Risolvendo per b si ottiene:

$$b = \frac{3\ln(P_{tun})\,\hbar W}{-4\sqrt{2m}\,(W-E)^{\frac{3}{2}}} = 3.37\ nm$$

Esercizio 5

La velocità di fase è data da:

$$v_p = \frac{\omega}{k}|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}\frac{E}{k}|_{k=k_0}$$

La velocità di gruppo è data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk}|_{k=k_0}$$

La dispersione del pacchetto è data da:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 t^2}{\alpha}}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}|_{k=k_0} = \frac{1}{2\hbar}\frac{d^2E}{dk^2}|_{k=k_0}$$

Nota la relazione di dispersione $E(k)$, si ottiene:

$$\frac{dE}{dk} = -2E_1 a \sin(2ka)$$

$$\frac{d^2E}{dk^2} = -4E_1 a^2 \cos(2ka)$$

La velocità di gruppo e di fase non dipendono dal tempo. Noti E_0, E_1, k_0 e a dal testo si ottiene:

$$v_p = \frac{1}{\hbar}\frac{E_0 + E_1\cos(2k_0a)}{k_0} = 5.416 \cdot 10^5\ m/s$$

$$v_g = \frac{1}{\hbar}(-2E_1 a \sin(2k_0a)) = 0$$

Per calcolare la dispersione del pacchetto, si ricavano inizialmente α e β:

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-16}\ m^2$$

$$\beta = \frac{1}{2\hbar}(-4E_1a^2\cos(2ka)) = 2.5 \cdot 10^{-3}\,\frac{m^2}{s}$$

Conseguentemente:

$$\sigma_x(0) = 1.414 \cdot 10^{-8}\, m$$

$$\sigma_x(1\, ps) = 1.793 \cdot 10^{-7}\, m$$

$$\sigma_x(100\, ps) = 1.79 \cdot 10^{-5}\, m$$

<u>Esercizio 6</u>

Dalla legge di Ohm si ha:

$$V_A = I \cdot R(T) = I \cdot \rho(T) \cdot \frac{L}{A}$$

La resistività di un semiconduttore è data da:

$$\rho(T) = \frac{1}{q \cdot n_i(T) \cdot \mu_n(T) + q \cdot n_i(T) \cdot \mu_p(T)} = \frac{1}{q \cdot n_i(T) \cdot (\mu_n(T) + \mu_p(T))}$$

La concentrazione intrinseca e le mobilità dipendono dalla temperatura come:

$$n_i \propto T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

$$\mu_n \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mu_p \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

Pertanto la dipendenza dalla temperatura di ρ è:

$$\rho(T) \propto T^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{E_g}{2kT}} \cdot T^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{E_g}{2kT}}$$

Da cui:

$$\frac{\rho(450\, K)}{\rho(300\, K)} = e^{\frac{E_g}{2k(450K)} - \frac{E_g}{2k(300\, K)}} = 7.33 \cdot 10^{-4}$$

Lo stesso rapporto si ritrova pertanto fra le resistenze R(300 K) e R(450 K). Conseguentemente:

$$I(450\, K) = \frac{V_A}{R(450\, K)} = \frac{V_A}{R(300\, K) \cdot \frac{R(450\, K)}{R(300\, K)}} = I(300\, K) \cdot \frac{1}{7.33 \cdot 10^{-4}} = 109.1\, mA$$

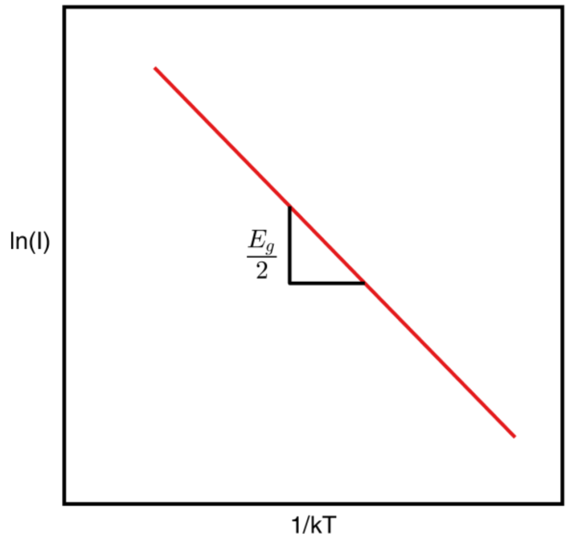
Per disegnare il grafico Arrhenius, scriviamo l'espressione della corrente come:

$$I(T) = I_0 \cdot e^{-\frac{E_g}{2}\left(\frac{1}{kT} - \frac{1}{kT_0}\right)} = \left(I_0 e^{\frac{E_g}{2kT_0}}\right) e^{-\frac{E_g}{2} \cdot \frac{1}{kT}}$$

Quindi:

$$\ln I = \left(\ln I_0 + \frac{E_g}{2kT_0}\right) + \left(-\frac{E_g}{2}\right)\left(\frac{1}{kT}\right) = \alpha + \left(-\frac{E_g}{2}\right)\left(\frac{1}{kT}\right)$$

La relazione fra $\ln I$ e $\frac{1}{kT}$ è quindi lineare decrescente con pendenza $\frac{E_g}{2}$.



Esercizio 7

La densità di corrente termoionica per un metallo con funzione lavoro W è data da:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Eguagliando la densità di corrente per il primo metallo J_1 a temperatura T_1 con la densità di corrente per il secondo metallo J_2 a temperatura T_2 si ottiene:

$$J_1(T_1 = 350\ K) = J_2(T_2 = 200\ K)$$

$$AT_1^2 e^{-\frac{W_1}{kT_1}} = AT_2^2 e^{-\frac{W_2}{kT_2}}$$

Come ragionevole approssimazione, si considera solo la dipendenza esponenziale dalla temperatura. Conseguentemente:

$$e^{-\frac{W_1}{kT_1}} \simeq e^{-\frac{W_2}{kT_2}}$$

Risolvendo per W_2 si ottiene:

$$W_2 = W_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 5.1\ eV \cdot \frac{200\ K}{350\ K} = 2.91\ eV$$

(Il secondo campione è in Litio).

Esercizio 8

La corrente scorre in direzione x positiva; il campo magnetico è entrante nella barretta in direzione z negativa. Si ipotizzi che la corrente sia data da elettroni, che pertanto si muovono in direzione x negativa. Per effetto del campo magnetico, i portatori tendono a disporsi verso y positive. La tensione V_H con il verso indicato in figura risulterebbe quindi $V_H > 0$. Il testo riporta $V_H = 10mV > 0$, pertanto il drogaggio è n.

All'equilibrio, le forze di Lorentz e di Coulomb si equivalgono:

$$qvB = qF_H = q\frac{V_H}{W}$$

Esprimendo la velocità come $v = \mu_n F_L = \mu_n \frac{V_L}{L}$, si ricava la mobilità elettronica:

$$q\mu_n \frac{V_L}{L} B = q\frac{V_H}{W}$$

$$\mu_n = \frac{V_H}{V_L}\frac{L}{W}\frac{1}{B} = 148.15\ \frac{cm^2}{V \cdot s}$$

La corrente attraverso la barretta è data da:

$$I = J \cdot W \cdot H = qN_d\mu_n \frac{V_L}{L} \cdot W \cdot H$$

Risolvendo per N_d si ottiene:

$$N_d = \frac{L \cdot I}{q\ \mu_n\ V_L\ W\ H} = 1.4 \cdot 10^{17}\ cm^{-3}$$

Per capire se si sta operando in regime di velocità saturata, si considera l'energia del fonone ottico nel silicio, che a temperatura ambiente è pari a $\hbar\omega_{ph} = 63\ meV$, da cui la velocità di saturazione:

$$v_{sat} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar\omega_{ph}}{m}} = 7.44 \cdot 10^6\ cm/s$$

Il corrispondente campo di saturazione è dato da:

$$F_{sat} = \frac{v_{sat}}{\mu_n} = 5.02 \cdot 10^4 \frac{V}{cm}$$

Il campo totale ai capi della barretta risulta:

$$F = \frac{V_L}{L} = 3 \cdot 10^4 \frac{V}{cm}$$

Essendo $F < F_{sat}$, non si è in regime di velocità saturata.

Esercizio 9

La concentrazione intrinseca di portatori ad una temperatura T è data da:

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

A temperatura ambiente, la densità di stati in banda di conduzione vale:

$$N_C(T = 300\ K) = \frac{1}{4\hbar^3}\left(\frac{2m^*_{DOS,n}\ kT}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} = 4.15 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}$$

Per calcolare la densità di stati in banda di valenza, occorre prima ricavare la massa DOS per le lacune:

$$m^*_{DOS,p} = \left(m^*_{p,hh}{}^{\frac{3}{2}} + m^*_{p,lh}{}^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.392m_0$$

$$N_V(T = 300\ K) = \frac{1}{4\hbar^3}\left(\frac{2m^*_{DOS,p}\ kT}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} = 6.16 \cdot 10^{18}\ cm^{-3}$$

La concentrazione intrinseca di portatori a temperatura ambiente è quindi:

$$n_i(T = 300\ K) = \sqrt{N_C N_V}\ e^{-\frac{E_g}{2kT}} = 1.89 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}$$

Ricordando che:

$$n_i(T) \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

La concentrazione intrinseca a una temperatura qualsiasi T può essere ricavata a partire da quella nota a 300 K:

$$n_i(T) = n_i(300\ K) \cdot \left(\frac{T}{300\ K}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{300\ K}\right)}$$

Trascurando la dipendenza da $T^{\frac{3}{2}}$, si impone:

$$n_i(T) = N_d \simeq n_i(300\ K) \cdot e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{300\ K}\right)}$$

Risolvendo per T si ottiene:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{300\ K} - \frac{2k}{E_g}\ \ln\left(\frac{N_d}{n_i(300\ K)}\right)} = 608\ K$$

Esercizio 10

La concentrazione di elettroni tende a diminuire nel tempo secondo:

$$n(t) = n' \cdot e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

In ogni istante, vale anche:

$$n(t) = n_i e^{-\frac{E_i - F_n(t)}{kT}}$$

All'istante t_1 cercato, $F_n(t_1) = F_n(0) - 50\ meV$, quindi:

$$n(t_1) = n_i e^{-\frac{E_i - F_n(t_1)}{kT}} = n' \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau_n}} = n_i e^{-\frac{E_i - F_n(0)}{kT}} \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau_n}}$$

Sostituendo $F_n(t_1)$ e risolvendo per t_1 si ottiene:

$$e^{-\frac{50\ meV}{kT}} = e^{-\frac{t_1}{\tau_n}}$$

$$t_1 = \tau_n \cdot \frac{50\ meV}{kT} = 0.387\ \mu s$$