Approfondimento sui coefficienti di Fresnell

Giandomenico Panettieri, Matteo Farronato

giandomenico.panettieri@mail.polimi.it
matteo.farronato@polimi.it

1 | Derivazione dei coefficienti di Fresnell per un onda polarizzata TM

1.1. Derivazione dei coefficienti di Fresnel

Qui viene riportata una dimostrazione relativa ai coefficienti di Fresnell.
I coefficienti di Fresnel permettono di calcolare la percentuale di onda elettromagnetica che viene riflessa e trasmessa nel caso di incidenza su una superficie di separazione .

Siamo interessati al coefficiente di Fresnel di un'onda TM (si può dimostrare con gli stessi ragionamenti il caso di un'onda TE)

$$r_{TM} = \frac{E_r}{E_i} \tag{1.1}$$

In Fig.1, un'onda incide dal mezzo 1 al mezzo 2. Sono indicate tutte le componenti delle onde riflesse e trasmesse e gli angoli rispetto alla normale. Indichiamo con γ la circuitazione che comprende il punto di incidenza ad entrambi i mezzi.

Utilizzando la forma integrale del teorema di Faraday in assenza di campi magnetici esterni

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{1.2}$$

e, ipotizzando che $\Delta h \to 0$, possiamo scomporre i vettori E_i, E_r ed E_t lungo la circuitazione, ottenendo

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_i cos(\theta_i) + E_r cos(\theta_r) - E_t cos(\theta_t) = 0.$$

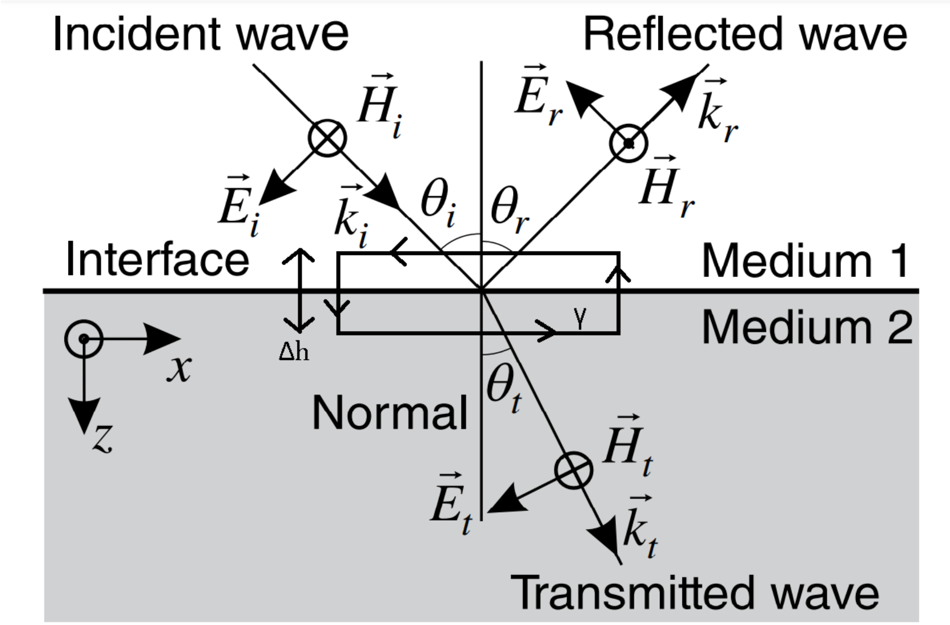

Figure 1.1: Rappresentazione schematica del problema. Sono indicate le direzioni del vettore campo elettrico e del vettore campo magnetico nel caso di onda incidente, onda riflessa e onda trasmessa. Viene riportata inoltre la circuitazione γ.

Si ricava:

$$E_i cos(\theta_i) + E_r cos(\theta_i) = E_t cos(\theta_t) \tag{1.3}$$

Si osservi che il secondo coseno ha $\theta_i = \theta_r$ proprio per via della prima legge di Snell.
Eseguiamo un ragionamento del tutto analogo per il campo magnetico trasversale, per il quale vale la legge di Ampere-Maxwell nel caso di correnti, nei materiali e di spostamento, entrambe nulle:

$$\oint_{\gamma'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_i + B_r = B_t \tag{1.4}$$

Per il campo magnetico all' interno dei materiali valgono queste relazioni

$$B_i = \frac{E_i}{c} n_1 \qquad B_r = \frac{E_r}{c} n_1 \qquad B_t = \frac{E_t}{c} n_2$$

Unendo adesso 1.3 e 1.4 assieme, otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{E_i}{c} n_1 + \frac{E_r}{c} n_1 = \frac{E_t}{c} n_2 \\ E_i cos(\theta_i) + E_r cos(\theta_i) = E_t cos(\theta_t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (E_i + E_r) n_1 = E_t n_2 \\ E_i cos(\theta_i) + E_r cos(\theta_i) = E_t cos(\theta_t) \end{cases}$$

Alla seconda equazione sostituiamo la prima equazione ottenendo:

$$E_i cos(\theta_i) + E_r cos(\theta_i) = (E_i + E_r)\frac{n_1}{n_2} cos(\theta_t)$$

$$E_i n_2 cos(\theta_i) + E_r n_2 cos(\theta_i) = (E_i + E_r) n_1 cos(\theta_t)$$

$$E_i(n_2 cos(\theta_i) - n_1 cos(\theta_t)) + E_r(n_2 cos(\theta_i) + n_i cos(\theta_t)) = 0$$

da cui possiamo ricavare il coefficiente di Fresnell per le onde TM:

$$r_{TM} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 cos(\theta_t) - n_2 cos(\theta_i)}{n_1 cos(\theta_t) + n_2 cos(\theta_i)}. \tag{1.5}$$

La dimostrazione è analoga nel caso di onde TE per le quali risulta invece:

$$r_{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 cos(\theta_i) - n_2 cos(\theta_t)}{n_1 cos(\theta_i) + n_2 cos(\theta_t)} \tag{1.6}$$

2 | Sfasamento del campo elettrico nel caso di TIR

Nel caso di riflessione interna totale ($n_1 > n_2$) non si ha onda trasmessa.
A tal proposito, consideriamo il caso delle onde TE (ragionamenti analoghi per le TM)

$$r_{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 cos(\theta_i) - n_2 cos(\theta_t)}{n_1 cos(\theta_i) + n_2 cos(\theta_t)} = \frac{cos(\theta_i) - \frac{n_2}{n_1} cos(\theta_t)}{cos(\theta_i) + \frac{n_2}{n_1} cos(\theta_t)}$$

ricordando che $cos(\theta_t) = \sqrt{1 - sin^2(\theta_t)}$, otteniamo

$$r_{TE} = \frac{cos(\theta_i) - \frac{n_2}{n_1}\sqrt{1 - sin^2(\theta_t)}}{cos(\theta_i) + \frac{n_2}{n_1}\sqrt{1 - sin^2(\theta_t)}}$$

Utilizziamo la legge di Snell per trasformare l'angolo di trasmissione:

$$sin(\theta_t) = \frac{n_1}{n_2} sin(\theta_i). \tag{2.1}$$

Sostituiamola nella relazione del coefficiente di Fresnel

$$r_{TE} = \frac{cos(\theta_i) - \frac{n_2}{n_1}\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} sin^2(\theta_i)}}{cos(\theta_i) + \frac{n_2}{n_1}\sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} sin^2(\theta_i)}}$$

e otteniamo

$$r_{TE} = \frac{cos(\theta_i) - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - sin^2(\theta_i)}}{cos(\theta_i) + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - sin^2(\theta_i)}} \tag{2.2}$$

dove osserviamo che in generale r_{TE} risulta essere complesso e di modulo unitario nel caso della TIR. Poichè risulta

$$E_r = r_{TE} E_i$$

è chiaro che, posta a zero la fase di E_i (riferimento di fase), si ottiene che lo sfasamento reciproco vale

$$\Delta\phi = \phi(r_{TE})$$

ossia la fase del coefficiente di Fresnell indicato in 1.8.