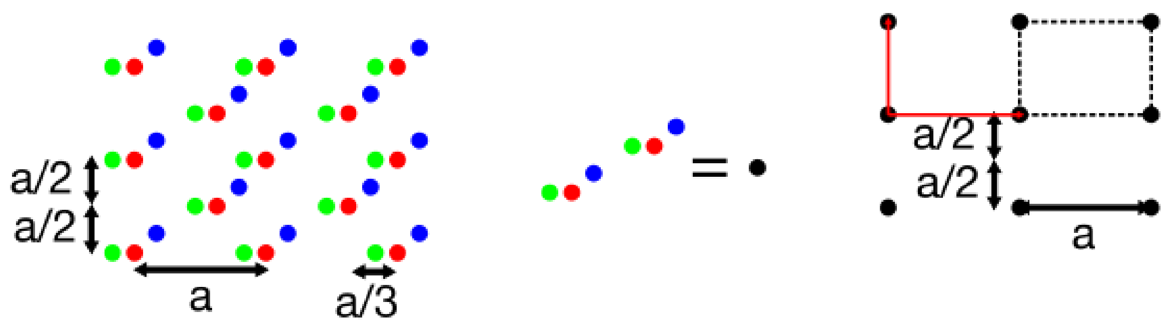
ESS 11/04/2022

Esercizio 1

Si consideri il cristallo triatomico mostrato in **Fig. 1**. Stabilire se il cristallo è un reticolo di Bravais, motivando la risposta. Nel caso in cui non fosse un reticolo di Bravais, proporre una possibile combinazione reticolo/base. Noto a = 2nm, calcolare la densità atomica superficiale.

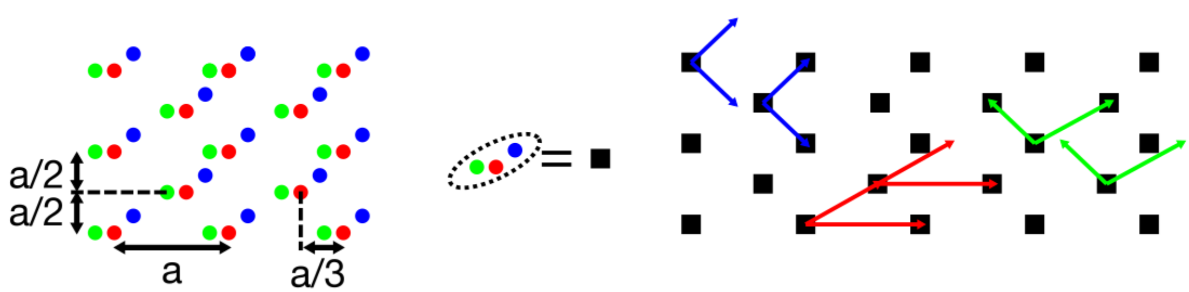
Soluzione 1

Non è un reticolo di Bravais: non è possibile individuare una coppia di vettori primitivi che determinino pienamente il reticolo senza ambiguità di traslazione.
Una possibile base è quella da sei atomi in figura, che riporta ad un reticolo quadrato:

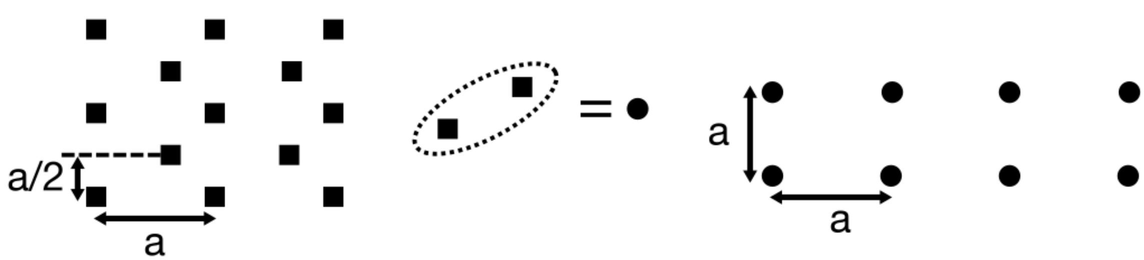


$$\rho_{at} = N_{at/base} \cdot \frac{\frac{N_{basi}}{cell}}{A_{cell}} = \; 6 \cdot \frac{1}{a \cdot a} = 1.5 \cdot 10^{18}\, m^{-2} = 1.5 \cdot 10^{14}\, cm^{-2}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare mediante due successive trasformazioni. Nella prima trasformazione, si assumeva come base quella triatomica:



Il risultato non era ancora un reticolo di Bravais. Una seconda trasformazione, prendendo adesso una base biatomica, restituiva un reticolo quadrato:



La densità atomica si calcolava quindi tenendo conto delle due trasformazioni:

$$\rho_{at} = N_{\frac{at}{base1}} \cdot N_{\frac{basi1}{base2}} \cdot \frac{N_{\frac{base2}{cell}}}{A_{cell}} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{a \cdot a} = 1.5 \cdot 10^{18}\ m^{-2} = 1.5 \cdot 10^{14}\ cm^{-2}$$

Esercizio 2

Si consideri un elettrone la cui posizione è misurabile a meno di un'incertezza $\Delta x = 5\ nm$. Stimare la corrispondente incertezza sulla sua velocità v_x lungo l'asse x.

Soluzione 2

Ricordando il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Essendo $p = mv$, l'incertezza sul momento è correlata all'incertezza sulla velocità come:

$$\Delta p = m\Delta v$$

Pertanto:

$$m\Delta v \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{1}{\Delta x} = 1.16 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

Esercizio 3

Si consideri un corpo nero a temperatura T avente uno spettro di emissione con picco in λ = 650 nm. Calcolare lo spostamento del picco dovuto a un aumento di un fattore 2 della potenza emessa da un orifizio della cavità.

Soluzione 3

La potenza di emissione è legata alla temperatura dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma S\, T^4$$

Al contempo, la temperatura è legata alla lunghezza d'onda del picco dalla legge di Wien:

$$\lambda_{peak} T = c_w$$

Un aumento della potenza emessa corrisponde ad un aumento della temperatura:

$$P' = 2P = 2\sigma S T^4 = \sigma S (T')^4$$

$$(T')^4 = 2T^4 \quad \rightarrow \quad T' = \sqrt[4]{2} \cdot T$$

A tale aumento della temperatura corrisponde quindi una diminuzione della lunghezza d'onda di picco. Imponendo quindi:

$$\lambda'_{peak} T' = c_w = \lambda_{peak} T$$

$$\lambda'_{peak} = \frac{T}{T'}\, \lambda_{peak} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\, \lambda_{peak} = 546.6\ nm$$

Lo spostamento è quindi di:

$$\Delta\lambda_{peak} = 103.41\ nm$$

Esercizio 4

Un fascio di raggi X emesso da una sorgente con energia $E = 5\ keV$ viene fatto incidere su un cristallo cubico semplice. Stimare la minima distanza interplanare risolvibile. Noto che per un angolo $\theta = 18°$ viene osservato il primo ordine di diffrazione per i piani (110), determinare il passo reticolare del cristallo.

Soluzione 4

Il fascio incidente ha lunghezza d'onda pari a:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 2.48\ \text{Å}$$

Per dare luogo ad effetti di diffrazione, deve valere:

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

La distanza interplanare è quindi esprimibile in termini dell'angolo incidente e della lunghezza d'onda della radiazione come:

$$d = n\frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sin\theta}$$

Minimizzando l'espressione ($n = 1, \sin\theta = 1$) si ottiene che la minima distanza interplanare che da luogo a fenomeni di diffrazione è pari a:

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2} = 1.24\ \text{Å}$$

Il testo adesso indica che quando $\theta = 18°$, si ottiene il primo ($n = 1$) picco di diffrazione per i piani (110). La distanza interplanare vale quindi:

$$d_{110} = 1 \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\sin 18°} = 4\ \text{Å}$$

Ricordando che la distanza interplanare è legata al passo reticolare dalla relazione generale:

$$d_{hlk} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}$$

Si può esprimere il passo reticolare a in funzione della distanza interplanare d_{110}:

$$a = d_{110}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}\, d_{110} = 5.68\ \text{Å}$$

Esercizio 5

Considerare un fascio di luce incidente su un target in Platino (W = 6.35 eV). Sapendo che, in assenza di polarizzazione, la velocità degli elettroni all'anodo è pari a $v = 10^5\ m/s$, determinare la lunghezza d'onda della radiazione luminosa. Calcolare quindi la corrispondente tensione di stopping V_{stop} .

Soluzione 5

L'energia cinetica degli elettroni all'anodo è pari a:

$$E_k(x = L) = \frac{1}{2}mv^2 = 28.4\ meV$$

Non essendo applicata una tensione di polarizzazione, l'energia cinetica al catodo sarà la stessa:

$$E_k(x = 0) = E_k(x = L) = 28.4\ meV$$

L'energia del fotone entrante è quindi:

$$E_{ph} = W + E_k(x = 0) = 6.38\ eV$$

A cui quindi corrisponde una lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}} = 194.5\ nm$$

La tensione di stopping è quindi pari a:

$$|V_{stop}| = \frac{1}{q} \cdot (E_{ph} - W) = 28.4\ mV$$

Esercizio 6

Si consideri il gradino di potenziale in Fig. 2 dove $V = \frac{2}{3}E$. Si calcoli il rapporto tra flusso riflesso e flusso trasmesso.

Soluzione 6

Nella regione x < 0 il vettore d'onda vale:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Nella regione x > 0 il vettore d'onda vale:

$$k' = \frac{\sqrt{2m(E+V)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE\left(1+\frac{2}{3}\right)}}{\hbar} = k \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Imponendo la continuità dell'autofunzione in x = 0:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
$$\psi_2 = Ce^{ik'x}$$
$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$
$$B = \frac{k-k'}{k+k'}A$$
$$C = \frac{2k}{k+k'}A$$

I flussi riflesso e trasmesso sono dati da:

$$\phi_r = \frac{\hbar k}{m}\left|\frac{B}{A}\right|^2$$
$$\phi_t = \frac{\hbar k'}{m}\left|\frac{C}{A}\right|^2$$

Il rapporto vale quindi:

$$\frac{\phi_r}{\phi_t} = \frac{k}{k'} \cdot \left|\frac{B}{A}\right|^2 \cdot \left(\left|\frac{C}{A}\right|^2\right)^{-1} = \frac{k}{k'} \cdot \frac{(k-k')^2}{(2k)^2} = \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = 0.0164$$

Esercizio 7

Si consideri il sistema buca-barriera in Fig. 3, dove $a = 5\ nm$ e $b = 2.5\ nm$. Sapendo che il tempo di tunneling per un elettrone sul livello E_1 della buca è pari a $T_{tun} = 500\ ms$, stimare l'altezza V_0 della barriera.

Soluzione 7

Il livello E_1 della buca corrisponde ad un'energia:

$$E_1 = 1^2 \cdot \frac{h^2}{8ma^2} = 15\ meV$$

Per il tempo di tunneling vale:

$$T_{tun} = \frac{t_{AR}}{P_T}$$

Dove:

$$t_{AR} = \frac{2a}{v} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = 137.5\ fs$$

La probabilità di tunneling attraverso la barriera vale quindi:

$$P_T = \frac{t_{AR}}{T_{tun}} = 2.74 \cdot 10^{-13}$$

Ricordando che la probabilità di tunneling è legata all'energia dell'elettrone e ai parametri della barriera come (approssimazione WKB):

$$P_T = e^{-2\frac{\sqrt{2m(V_0-E_1)}}{\hbar}b}$$

Si può esprimere l'altezza della barriera in funzione degli altri parametri come:

$$\log(P_T) = -2\frac{\sqrt{2m(V_0-E_1)}}{\hbar}b$$
$$\frac{\hbar^2}{8mb^2}\cdot\log^2(P_T) + E_1 = V_0$$

Da cui quindi:

$$V_0 = 1.29\ eV$$

Esercizio 8

In una buca rettangolare di potenziale, il rilassamento di un elettrone dal terzo autostato E_3 al primo autostato E_1 causa l'emissione di un fotone con lunghezza d'onda $\lambda_{ph} = 1\ \mu m$. Usando l'approssimazione di buca a pareti infinite, determinare la larghezza a della buca. Rimuovere quindi l'ipotesi di pareti infinite. La larghezza a determinata precedentemente è una sovrastima o una sottostima della larghezza effettiva della buca?

Soluzione 8

Il gap di energia fra il primo e il terzo autostato è esprimibile, nell'approssimazione di buca a pareti infinite:

$$\Delta E_{31} = E_3 - E_1 = 3^2\frac{h^2}{8ma^2} - 1^2\frac{h^2}{8ma^2} = 8\frac{h^2}{8ma^2} = \frac{h^2}{ma^2}$$

Tale gap corrisponde all'energia del fotone emesso per rilassamento, che è ricavabile a partire dalla lunghezza d'onda:

$$E_{ph} = \Delta E_{31} = \frac{hc}{\lambda} = 1.24\ eV$$

La larghezza della buca si può quindi stimare come:

$$a = \frac{h}{\sqrt{m\cdot\Delta E_{31}}} = \frac{h}{\sqrt{m\cdot E_{ph}}} = 1.56\ nm$$

Se si considera una buca a pareti finite, l'energia dei singoli autostati tende a diminuire rispetto al caso a pareti infinite a causa della penetrazione della funzione d'onda nelle pareti del dominio. Tale penetrazione è più marcata salendo in energia. Pertanto gli autostati effettivi della buca si collocano a delle energie:

$$E_3' = E_3 - \delta E_3$$
$$E_1' = E_1 - \delta E_1$$
$$0 < \delta E_1 < \delta E_3$$

Il gap fra i due autostati tende quindi ad essere più basso rispetto al caso ideale, poiché l'autostato E_3 si abbassa più dell'autostato E_1:

$$\Delta E_{31}' = E_3' - E_1' = (E_3 - \delta E_3) - (E_1 - \delta E_1) = E_3 - E_1 - (\delta E_3 - \delta E_1) = \Delta E_{31} - \delta(\Delta E_{31})$$
$$\delta(\Delta E_{31}) > 0$$

Se la buca fosse quindi di larghezza $a = 1.56\ nm$, il gap energetico sarebbe in realtà più basso di $1.24\ eV$. La buca deve quindi avere una larghezza minore di a, così che il gap energetico (considerando la diminuzione operata dalla finitezza della barriera) effettivo possa essere di $1.24\ eV$. La larghezza a è quindi una sovrastima della larghezza effettiva della buca.

Esercizio 9

Si consideri una buca di potenziale del tipo $V(x) = \alpha x^{\beta}$. Sapendo che l'energia degli autostati ha una dipendenza del tipo $E_n \propto n^{0.5}$, stimare il parametro di dipendenza spaziale β del potenziale.

Soluzione 9

La spaziatura degli autostati si può stimare per un generico profilo di potenziale a partire dal principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p_n \Delta x \simeq n\hbar$$

Dove per la posizione ad esempio:

$$x_{max} = \left(\frac{1}{\alpha}E_n\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad x_{min} = -\left(\frac{1}{\alpha}E_n\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad \Delta x = 2\left(\frac{1}{\alpha}E_n\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Per il momento parimenti:

$$p_{n,max} = \sqrt{2mE_n} \qquad p_{n,min} = -\sqrt{2mE_n} \qquad \Delta p_n = 2\sqrt{2mE_n}$$

Ottenendo quindi:

$$2\sqrt{2mE_n} \cdot 2\left(\frac{1}{\alpha}E_n\right)^{\frac{1}{\beta}} \simeq n\hbar$$

Esplicitando l'energia degli autostati:

$$E_n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} = E_n^{\frac{\beta+2}{2\beta}} \simeq n\frac{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\hbar}{4\sqrt{2m}}$$

$$E_n \simeq n^{\frac{2\beta}{\beta+2}} \cdot \left(\frac{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\hbar}{4\sqrt{2m}}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+2}}$$

Perché sia $E_n \propto n^{0.5}$ deve quindi valere:

$$\frac{2\beta}{\beta+2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{2}{3}$$

Esercizio 10

Si consideri un pacchetto d'onda gaussiano centrato in $k_0 = 10^9\ m^{-1}$ con deviazione standard $\sigma_k = \frac{k_0}{10}$. Determinare la velocità di gruppo con cui il pacchetto si propaga attraverso un materiale con relazione di dispersione $\omega(k) = \omega_0\left(1 + \sin\left(\frac{2}{3}ka\right)\right)$, dove $a = 0.6\ nm$ e $\omega_0 = 10^{15}\ rad/s$. Determinare l'istante $\tilde{t}$ in cui il rapporto fra la dispersione del pacchetto e la dispersione iniziale vale $\frac{\sigma_x(\tilde{t})}{\sigma_x(0)} = \sqrt{2}$.

Soluzione 10

La velocità di gruppo corrisponde alla derivata prima della relazione di dispersione rispetto al vettore d'onda:

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = \omega_0 \cdot \frac{2}{3}a \cdot \cos\left(\frac{2}{3}ka\right)$$

Valutando la velocità di gruppo in corrispondenza del centro del pacchetto si ottiene:

$$v_g(k_0) = 3.68 \cdot 10^5 \ m/s$$

La dispersione del pacchetto del tempo segue invece la relazione:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} t^2}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} = 5 \cdot 10^{-17} \ m^2 = (7.07 \ nm)^2$$

$$\beta(k) = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} = -\frac{1}{2}\omega_0 \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \sin\left(\frac{2}{3}ka\right)$$

Valutando il parametro di dispersione nell'intorno del pacchetto si ottiene quindi:

$$\beta(k_0) = \beta = -3.11 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s^2}$$

Al tempo $\tilde{t}$ cercato, vale dal testo:

$$\frac{\sigma_x(\tilde{t})}{\sigma_x(0)} = \frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\tilde{t}^2}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}0^2}} = \frac{\sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\tilde{t}^2}}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{2}$$

$$\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\tilde{t}^2 = 2\alpha$$

$$\tilde{t} = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 1.6 \ ps$$