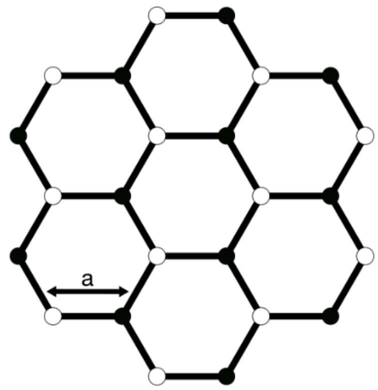
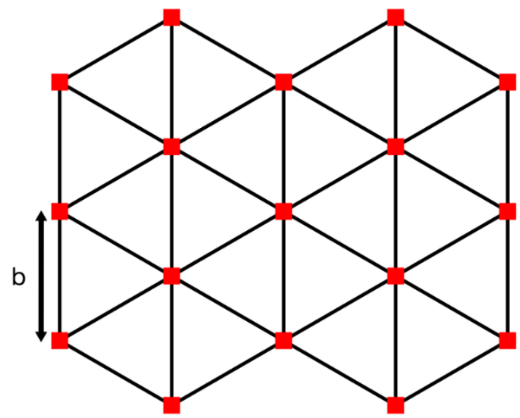
Soluzione appello 3 – 02/09/2022

Esercizio 1

Non è un reticolo di Bravais: non è possibile individuare una coppia di vettori primitivi che determini univocamente ogni nodo del reticolo. Raggruppando ciascuna terna di atomi (rosso/blu/verde e blu/rosso/verde), è possibile ricondursi ad una struttura a nido d'ape:



Scegliendo adesso come nuova base la coppia bianco-nero, ci si riconduce ad un reticolo esagonale:



Il lato della cella esagonale primitiva si può ricavare da considerazioni geometriche:

$$b = 2a\sin(60°) = 3.46\ nm$$

Da cui l'area della cella:

$$A_{cell} = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 = 3.11 \cdot 10^{-13}\ cm^2$$

Il numero di atomi per cella è dato da:

$$N_{\frac{at}{cell}} = N_{\frac{at}{base}} N_{\frac{base}{cell}} = 6 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{3} + 1\right) = 6 \cdot 3 = 18$$

Conseguentemente, la densità atomica superficiale è data da:

$$\rho_{at} = \frac{N_{\frac{at}{cell}}}{A_{cell}} = \frac{N_{\frac{at}{base}} N_{\frac{base}{cell}}}{A_{cell}} = \frac{18}{A_{cell}} = 5.77 \cdot 10^{13}\ cm^{-2}$$

Esercizio 2

Per un generico piano cristallino, affinché si possano osservare dei picchi di diffrazione deve valere:

$$n\lambda = 2d_{hlk}\sin(\theta)$$

Dove la lunghezza d'onda della sorgente è data da:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}} = 0.62\ nm$$

Ricordando che per un generico piano (h,l,k) la distanza interplanare si può ricavare come:

$$d_{hlk} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}$$

Piano	**Fattore**	$\boldsymbol{d_{hlk}}$	$\boldsymbol{\theta_1}$
(1,0,0), (0,1,0), …	1	$\frac{a}{\sqrt{1}} = 0.6\ nm$	31.13°
(1,1,0), (1,0,1), …	2	$\frac{a}{\sqrt{2}} = 0.42\ nm$	46.98°
(1,1,1)	3	$\frac{a}{\sqrt{3}} = 0.35\ nm$	63.57°

Per i piani superiori (es. (2,0,0)) non si osservano picchi di diffrazione, essendo:

$$d_{hlk} \leq \frac{a}{\sqrt{4}} = 0.3\ nm < 0.31\ nm = \frac{\lambda}{2}$$

Esercizio 3

L'energia dell'elettrone all'anodo è data da:

$$E_{k,a} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = 6.4\ eV$$

In assenza di tensione di accelerazione, tale energia è la stessa dell'elettrone al catodo:

$$E_{k,c} = E_{k,a} = 6.4\ eV$$

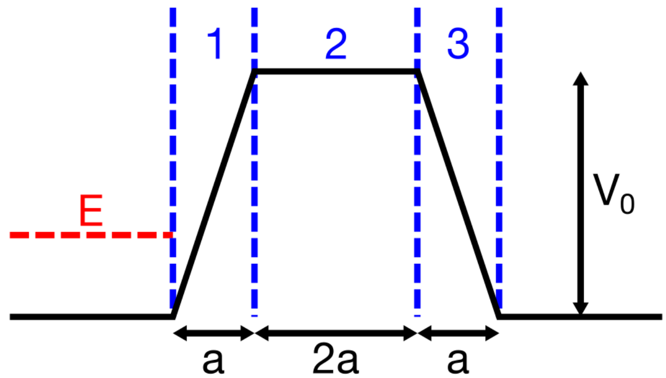
L'energia della radiazione entrante è data da:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = 12.4\ eV$$

Conseguentemente la funzione lavoro del metallo:

$$W = E_{ph} - E_{k,c} = 6\ eV$$

Esercizio 4



Dividendo la barriera nelle tre regioni (1), (2), (3), è possibile scrivere la probabilità di tunneling totale come:

$$P_T = P_{T,1} \cdot P_{T,2} \cdot P_{T,3}$$

Dove le tre probabilità possono essere determinate a mezzo dell'approssimazione WKB:

$$P_T = \exp\left(-2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m(W(x)-E)}}{\hbar}dx\right)$$

Per le regioni 1 e 3 vale l'approssimazione Fowler-Nordheim riferita a $W(x) = \frac{V_0}{a}x$, da cui:

$$P_{T,1} = P_{T,3} = \exp\left(-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar\frac{V_0}{a}}(V_0-E)^{\frac{3}{2}}\right) = 6.83 \cdot 10^{-7}$$

Per la regione 2 si ha $W(x) = V_0$, da cui:

$$P_{T,2} = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\cdot 2a\right) = 1.486 \cdot 10^{-31}$$

La probabilità totale di trasmissione è quindi:

$$P_T = 6.93 \cdot 10^{-44}$$

Esercizio 5

In approssimazione di buca a pareti infinite, gli autovalori si collocano alle energie:

$$E_n = n^2\frac{h^2}{8ma^2}$$

Lo stato fondamentale è quindi a:

$$E_1 = 0.376\ eV$$

Nelle regioni di barriera, il modulo quadro della funzione d'onda ha andamento esponenziale decrescente con costante di decadimento spaziale:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = 4.046 \cdot 10^9 \; m^{-1}$$

Conseguentemente, la penetrazione dell'autofunzione ad ogni lato della barriera può essere stimata come:

$$x_p \simeq \frac{1}{\alpha} = 0.247 \; nm$$

Il singolo lobo dell'autofunzione risulta quindi avere estensione:

$$\frac{\tilde{\lambda}}{2} = x_p + a + x_p$$

Da cui consegue che la lunghezza d'onda stimata sia:

$$\tilde{\lambda} = 4x_p + 2a = 3 \; nm$$

Si nota l'effetto dello scarso confinamento ($V_0 = 1 \; eV \;\gtrsim\; 0.376 \; eV = E_1$, $\tilde{\lambda} = 3 \; nm > 2nm = \lambda$).

Esercizio 6

Ricordando il modello di Drude, a stato stazionario:

$$0 = \frac{dk}{dt} = \frac{qF}{\hbar} - \frac{k}{\tau_m}$$

Da cui:

$$\tau_m = \frac{\hbar k}{qF} = 0.154 \; ps$$

Per ricavare la mobilità è necessario determinare la massa efficace:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk^2}\Big|_{k=k_s}}$$

Dove:

$$\frac{d^2E}{dk^2} = \frac{d}{dk}\left(\frac{d}{dk}\left(\frac{E_0}{2}[1 - \cos(ka)]\right)\right) = \frac{d}{dk}\left(\frac{E_0}{2}\sin(ka)\, a\right) = \frac{E_0}{2} a^2 \cos(ka)$$

Pertanto:

$$m^* = 0.197 \; m_e$$

Da cui la mobilità:

$$\mu = \frac{q\tau_m}{m^*} = 1365 \; \frac{cm^2}{Vs}$$

Esercizio 7

Determiniamo il contributo dei minimi anisotropi. Per ciascuno di essi, l'area dell'ellissoide è proporzionale a:

$$V_a \propto \left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ciascun minimo è tuttavia localizzato a cavallo del confine della FBZ, pertanto partecipa alla definizione della massa DOS con metà del proprio volume:

$$V_{a,tot} \propto \frac{1}{2}\left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Infine, sono presenti 6 minimi anisotropi, pertanto la degenerazione è $g = 6$:

$$V_{a,tot} \propto 6 \cdot \frac{1}{2}\left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il volume racchiuso dal minimo isotropo è invece proporzionale a:

$$V_i \propto m_i^{*\frac{3}{2}}$$

Per ottenere la massa DOS imponiamo quindi l'equivalenza:

$$m_{DOS}^{*}{}^{\frac{3}{2}} = \left(m_i^{*\frac{3}{2}} + 3\left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Da cui si ottiene:

$$m_{DOS}^* = \left(m_i^{*\frac{3}{2}} + 3\left(m_l^* m_t^{*2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \ 0.734\, m_e$$

Esercizio 8

La corrente termoionica è descritta dalla relazione di Richardson-Laue-Dushman:

$$J \propto \mathcal{A} T^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Trascurando la dipendenza quadratica dalla temperatura, si ottiene:

$$J \sim e^{-\frac{W}{kT}}$$

Imponendo l'uguaglianza fra le due correnti:

$$\frac{J_{Au}}{J_{Pb}} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{W_{Au}}{T_{Au}} = \frac{W_{Pb}}{T_{Pb}} \quad \rightarrow \quad T_{Pb} = \frac{W_{Pb}}{W_{Au}} T_{Au} = 250\ K$$

Esercizio 9

Il silico è drogato p, pertanto i portatori maggioritari saranno lacune. Per determinare la mobilità, ricordiamo che a stato stazionario sulla particella si equivalgono (1) la forza di Lorentz dovuta al campo magnetico e alla velocità impressa dalla tensione longitudinale e (2) la forza elettrostatica trasversale dovuta allo spostamento di carica.

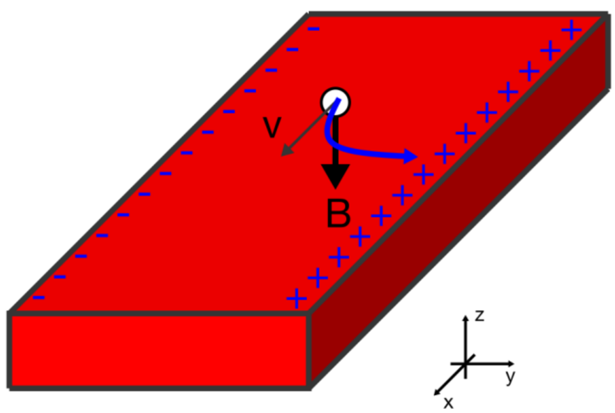
$$qvB = \frac{qV_H}{W}$$

Ricordando che la velocità può essere legata al campo longitudinale a mezzo della mobilità, si ottiene:

$$\mu \frac{V_L}{L} B = \frac{V_H}{W}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L} \frac{L}{W} \frac{1}{B} = 142.85 \frac{cm^2}{Vs}$$

Il verso della tensione di Hall può infine essere ricavato usando la regola della mano destra. Il campo magnetico B è diretto come z_-, mentre la lacuna si muove in direzione x_+ con carica positiva. La forza di Lorentz pertanto induce uno spostamento in direzione y_+, dove si concentra la carica positiva. La tensione di Hall è quindi positiva in direzione y_+.



Esercizio 10

All'equilibrio la concentrazione di elettroni è data da:

$$n = N_c e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

In condizioni di disequilibrio i livelli di Fermi per lacune ed elettroni splittano, così che:

$$n' = N_c e^{-\frac{E_c - F_n}{kT}}$$

Noto il rapporto fra le due concentrazioni, si può scrivere:

$$\frac{n'}{n} = 10^5 = e^{-\frac{E_C-F_n}{kT}+\frac{E_C-E_F}{kT}} = e^{\frac{F_n-E_F}{kT}}$$

Lo spostamento fra il quasi livello di Fermi e il livello di Fermi all’quilibrio è quindi:

$$\Delta E = F_n - E_F = kT\log(10^5) = 0.29\ eV$$