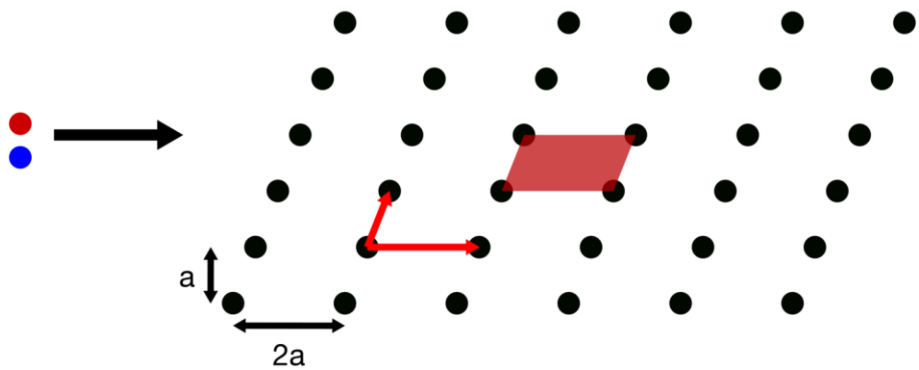
Soluzione appello 4 – 18/01/2023

Esercizio 1

Non è un reticolo di Bravais: non è possibile individuare una coppia di vettori primitivi che determini univocamente ogni nodo del reticolo. Identificando come base la coppia verticale blu/rosso, si ottiene un reticolo obliquo:



La cella unitaria contiene 4 basi, ciascuna condivisa fra 4 celle unitarie, da cui:

$$N_{\frac{at}{cell}} = N_{\frac{at}{base}} \cdot N_{\frac{basi}{cell}} = 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) = 2$$

L'area della cella può essere espressa in termini del passo reticolare come:

$$A_{cell} = a \cdot 2a = 2a^2$$

Pertanto, nota l'equazione della densità atomica superficiale:

$$\rho_{at} = \frac{N_{\frac{at}{cell}}}{A_{cell}}$$

Il passo reticolare si può ricavare come:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{N_{at/cell}}{\rho_{at}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6.5 \cdot 10^{13}\ cm^{-2}}} = 1.24\ nm$$

Esercizio 2

L'energia del fotone per le due sorgenti vale:

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 1.24\ eV < W$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = 7.36\ eV > W$$

In presenza di illuminazione infrarossa pertanto non si ha emissione di elettroni.

In presenza di illuminazione ultravioletta, l'energia (cinetica) dell'elettrone al catodo è data da:

$$E_{k,C} = E_2 - W = 1.01\ eV$$

Viaggiando fino all'anodo, l'elettrone acquista ulteriore energia per effetto della tensione di accelerazione:

$$E_{k,A} = E_{k,C} + qV_A = 2.01\ eV$$

Ricordando che in approssimazione semiclassica vale:

$$E_{k,A} = \frac{1}{2} m_e v_e^2$$

Si ottiene:

$$v_e = \sqrt{\frac{2E_{k,A}}{m_e}} = 8.42 \cdot 10^7\ \frac{cm}{s}$$

Esercizio 3

La lunghezza d'onda del picco di emissione è legata alla temperatura a mezzo della costante di Wien:

$$\lambda T = c_W$$

Da cui:

$$\lambda = \frac{c_w}{T} = 1\ \mu m$$

La potenza irraggiata dal corpo nero è descritta dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma T^4 A$$

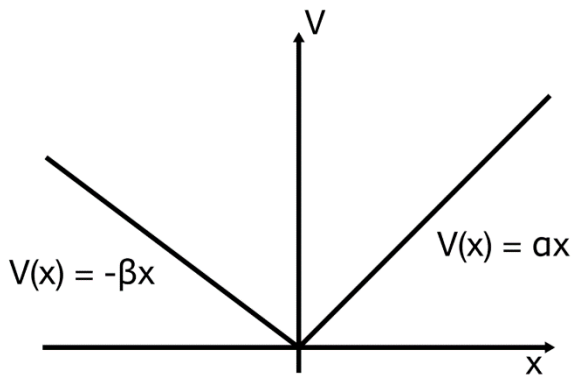
Imponendo che le potenze irraggiate dai due corpi neri si equivalgano si ottiene:

$$\sigma T_1^4 A_1 = P_1 = P_2 = \sigma T_2^4 A_2$$

Da cui, ricordando che per la sfera $A = 4\pi r^2 = \pi d^2$:

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{T_1^4}{T_2^4}} = d_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 0.276\ cm$$

Esercizio 4



Per stimare l'energia degli autostati si può usare il principio di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

L'indeterminazione sul momento si ricava dal punto di massima energia (cinetica):

$$p_{max} = \sqrt{2mE} \qquad p_{min} = -\sqrt{2mE}$$

$$\Delta p = p_{max} - p_{min} = 2\sqrt{2mE}$$

L'indeterminazione sulla posizione si ricava considerando gli estremi dell'autostato. Per x > 0 il potenziale è lineare, pertanto:

$$V(x_{max}) = \alpha x_{max} = E \qquad x_{max} = E/\alpha$$

$$V(x_{min}) = -\beta x_{min} = E \qquad x_{min} = -E/\beta$$

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = \frac{E}{\alpha} + \frac{E}{\beta} = E\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) = \frac{E}{\gamma}$$

Dove $\gamma = 0.43$ eV/nm. Imponendo $\Delta p \Delta x \simeq n\hbar$ si ha:

$$\Delta p \Delta x = 2\sqrt{2mE} \cdot \frac{E}{\gamma} \simeq n\hbar$$

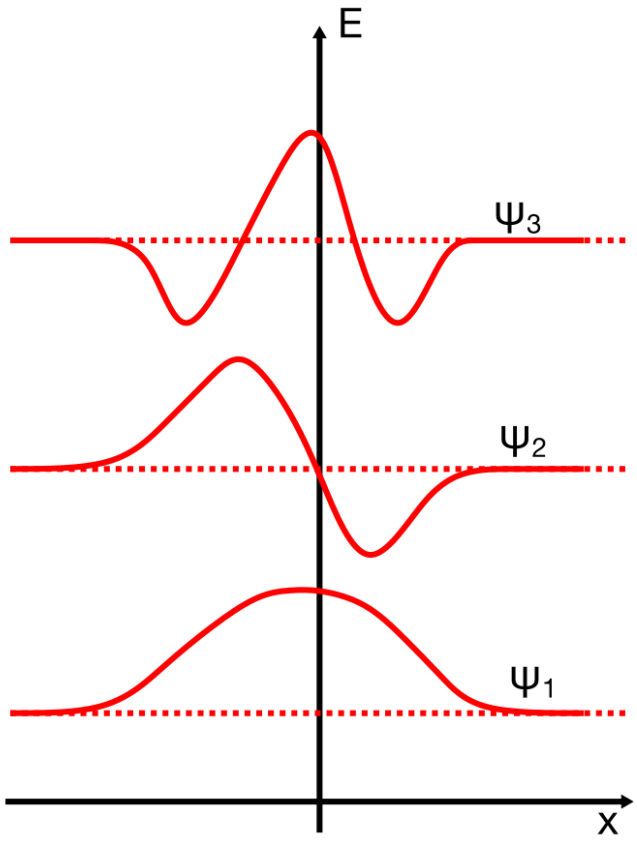
$$E^{\frac{3}{2}} = n\frac{\gamma\hbar}{2\sqrt{2m}}$$

$$E = n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\gamma\hbar}{2\sqrt{2m}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

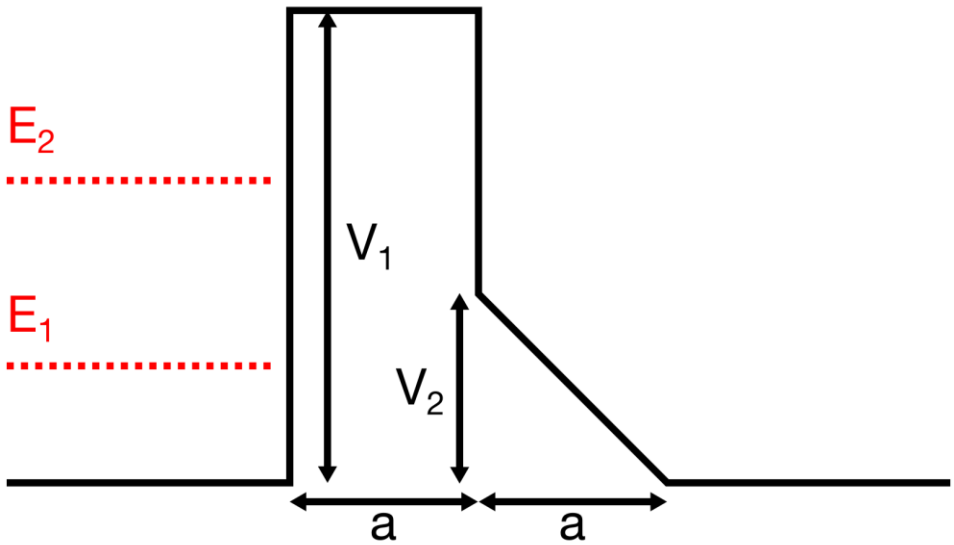
Per i primi tre autostati si ha quindi:

$$E_1 = 0.12\ eV \qquad E_2 = 0.19\ eV \qquad E_3 = 0.25\ eV$$

La parte reale delle funzioni d'onda si può disegnare considerando qualitativamente lo spostamento del baricentro della distribuzione verso la regione con minore confinamento, cioè x < 0.



Esercizio 5



Gli elettroni ad energia E_2 vedono una barriera di potenziale rettangolare di larghezza a e altezza V_1, pertanto:

$$P_{T2} = e^{-2\alpha_{21}a}$$

Dove $\alpha_{21} = \frac{\sqrt{2m(V_1-E_2)}}{\hbar} = 3.62 \cdot 10^9\ m^{-1}$, da cui $P_{T2} = 7.14 \cdot 10^{-4}$.

Gli elettroni ad energia E_1 vedono invece una barriera di potenziale rettangolare di larghezza a e altezza V_1, seguita da una barriera triangolare di larghezza a e altezza iniziale V_2. La probabilità di tunneling totale è quindi data dal prodotto delle probabilità attraverso le due semibarriere:

$$P_{T1} = P_{T1,1} \cdot P_{T1,2}$$

Per la barriera rettangolare si ha:

$$\alpha_{11} = \frac{\sqrt{2m(V_1 - E_1)}}{\hbar} = 5.73 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

$$P_{T1,1} = e^{-2\alpha_{11}a} = 1.06 \cdot 10^{-5}$$

Per la barriera triangolare si ha tunneling Fowler-Nordheim, per cui vale:

$$P_{T1,2} = e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\,q\hbar F}(V_2-E_1)^{\frac{3}{2}}}$$

Dove $F = \frac{V_2}{qa} = 1\ V/nm$. Pertanto:

$$P_{T1,2} = 0.43 \quad \rightarrow \quad P_{T1} = P_{T1,1} \cdot P_{T1,2} = 4.5 \cdot 10^{-6}$$

Esercizio 6

In approssimazione parabolica, le due bande di conduzione e valenza sono descritte da:

$$E_V = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$

$$E_C = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BC}^*}$$

Irradiando con una sorgente $\lambda = 1\mu m$, viene promosso dalla BC l'elettrone nello stato $\bar{k}$ dove il gap equivalente è pari a:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = 1.24\ eV$$

Deve pertanto valere:

$$E_C(\bar{k}) - E_V(\bar{k}) = E_g + \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m_{BC}^*} + \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m_{BV}^*} = E_{ph}$$

Allo stesso tempo, una volta promosso, l'elettrone termalizza sul fondo della BC emettendo 15 fononi di energia media E_{phn}, pertanto:

$$E_C(\bar{k}) - E_C(0) = E_g + \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m_{BC}^*} - E_g = \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m_{BC}^*} = 15E_{phn}$$

Sostituendo opportunamente nella relazione precedente si ha:

$$E_g + 15E_{phn} + 15E_{phn} \cdot \frac{m_{BC}^*}{m_{BV}^*} = E_{ph}$$

Da cui si ricava:

$$E_g = E_{ph} - 15E_{phn}\left(1 + \frac{m_{BC}^*}{m_{BV}^*}\right) = 0.97\ eV$$

Esercizio 7

La resistenza R della barretta è data da:

$$R(T) = \frac{\rho(T)l}{A}$$

Trascurando il contributo delle lacune, la resistività è approssimabile al contributo dei soli elettroni:

$$\rho \simeq \frac{1}{qn(T)\mu_n(T)}$$

A T = 300 K il semiconduttore è in zona estrinseca, pertanto $n(T) \simeq N_D$, indipendente dalla temperatura. La mobilità sarà dominata dallo scattering da impurezze ionizzate, pertanto:

$$\mu(T) \propto T^{\frac{3}{2}}$$

Conseguentemente:

$$\rho(T) \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

$$I(T) \propto T^{\frac{3}{2}}$$

$$I(500\ K) = \left(\frac{500}{300}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot I(300\ K) \simeq 2.15 \cdot I(300\ K) = 1.075\ mA$$

Esercizio 8

La densità di corrente per emissione termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J \propto \mathcal{A}T^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Le densità di corrente prodotte dai due metalli sono uguali, pertanto:

$$\mathcal{A}T^2 e^{-\frac{W}{kT}} = \mathcal{A}_{Au} T_{Au}^2 e^{-\frac{W_{Au}}{KT_{Au}}}$$

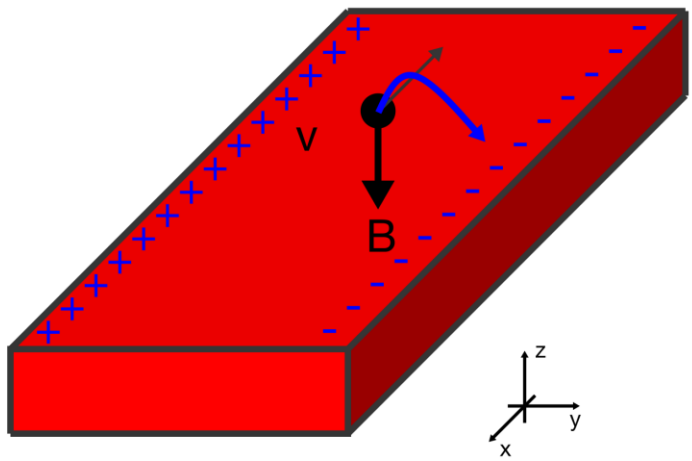
Approssimando $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_{Au}$, si ottiene:

$$W = -kT \cdot \log\left(\frac{T_{Au}^2}{T^2} \cdot e^{-\frac{W_{Au}}{kT_{Au}}}\right) = W_{Au}\frac{T}{T_{Au}} - 2kT \cdot \log\left(\frac{T_{Au}}{T}\right) = 2.9\ eV$$

(Il campione ignoto è in Cesio).

Esercizio 9

Il materiale è drogato n:



I portatori maggioritari (elettroni) tendono a muoversi verso x negative e sono soggetti ad un campo magnetico orientato verso z negative. Per effetto della forza di Lorentz ($F = (-q)\,\vec{v} \times \vec{B}$) si accumulano sul fronte y positivo, generando uno scompenso di carica positiva sul fronte y negativo, che giustifica il segno della tensione V_H.

Per determinare la mobilità dei portatori si impone il bilancio, a regime, fra la forza di Lorentz e quella elettrostatica:

$$qvB = q\frac{V_H}{W}$$

Ricordando che la velocità dei portatori è funzione del campo longitudinale,

$$v = \mu F_L = \mu\frac{V_L}{L}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L}\frac{L}{W}\frac{1}{B} = 400\,\frac{cm^2}{Vs}$$

La concentrazione dei portatori si può ricavare a partire dalla corrente misurata, ricordando:

$$I = \frac{V_L}{R} = \frac{V_L \cdot Wt}{\rho \cdot L}$$

Dove $\rho = \frac{1}{qp\mu_p} \simeq \frac{1}{qN_A\mu_p}$. Pertanto:

$$I = qN_A\mu_p \cdot \frac{V_L Wt}{L}$$

$$N_A = \frac{I}{q} \cdot \frac{L}{Wt} \cdot \frac{1}{\mu_p V_L} = 3.1 \cdot 10^{17}\ cm^{-3}$$

Esercizio 10

La concentrazione dei minoritari decresce nello spazio seguendo un decadimento esponenziale per effetto della ricombinazione:

$$n(x) = n_0 + \delta n_0 e^{-\frac{x}{L_n}}$$

Dove $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$. In condizioni di disequilibrio la concentrazione di elettroni in un generico punto x è descritta da:

$$n(x) = N_c e^{-\frac{E_c - F_n(x)}{kT}}$$

La concentrazione di portatori ad x = x_0 + 2 µm è quindi:

$$n(x_0 + 2\mu m) = \ 2 \cdot 10^{12}\ cm^{-3}$$

La concentrazione di minoritari all'equilibrio si può ricavare nota la concentrazione intrinseca e quella del drogante:

$$n_0 = \frac{n_i^2}{N_A} = 5.76 \cdot 10^9\ cm^{-3}$$

Essendo trascurabile ($< 1\%$) rispetto alla concentrazione di minoritari in eccesso, possiamo approssimare in entrambi i punti:

$$n(x) \simeq \delta n_0 e^{-\frac{x}{L_n}}$$

Note le concentrazioni in x_0 e $x_0 + 2\mu m$, si può ricavare la lunghezza di ricombinazione imponendo:

$$\frac{n(x_0 + 2\mu m)}{n(x_0)} = \frac{\delta n_0}{\delta n_0} \cdot e^{-\frac{1}{L_n}(x_0 + 2\mu m - x_0)}$$

Da cui:

$$-\frac{1}{L_n}(2\mu m) = \log\left(\frac{n(x_0 + 2\mu m)}{n(x_0)}\right)$$

$$L_n = -\frac{2\mu m}{\log\left(\frac{n(x_0 + 2\mu m)}{n(x_0)}\right)} = 0.5\ \mu m$$

Il tempo di ricombinazione si può quindi calcolare ricordando:

$$D_n = \frac{kT\mu_n}{q}$$

$$\tau_n = \frac{L_n^2}{D_n} = 80.73\ ps$$