6/7/2022 – Seconda prova in itinere

Esercizio 1

La differenza di fase in funzione della distanza è data da:

$$\Delta\phi(x) = kx$$

Quando l'autofunzione ritorna in fase:

$$\Delta\phi(d) = 2\pi = kd \rightarrow d = \frac{2\pi}{k} = 12.56\ nm$$

Pertanto l'autofunzione torna in fase dopo $N = \frac{d}{a} = 20$ passi reticolari.

Esercizio 2

Banda di valenza e banda di conduzione sono descritte da:

$$E_V(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*}(k - k_0)^2$$

In un processo a due particelle, il momento non può cambiare. Pertanto le transizioni sono caratterizzate delle energie ΔE:

$$\Delta E(k) = E_C(k) - E_V(k) = E_g + \frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*}(k - k_0)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_{BV}^*}k^2$$

Per trovare il k corrispondente alla minima transizione, imponiamo:

$$\frac{\delta(\Delta E)}{\delta k} = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*}2(k - k_0) + \frac{\hbar^2}{2m_{BV}^*}2k = 0$$

$$\frac{k}{m_{BC}^*} - \frac{k_0}{m_{BC}^*} + \frac{k}{m_{BV}^*} = 0$$

La transizione a minima energia avviene quindi in corrispondenza di:

$$k\left(\frac{1}{m_{BC}^*} + \frac{1}{m_{BV}^*}\right) = \frac{k_0}{m_{BC}^*} \rightarrow k = 0.8\ k_0$$

Sapendo che in corrispondenza di tale k la separazione fra le bande è di 1 eV, si ricava:

$$E_g + \frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*}(0.2)^2 k_0^2 + \frac{\hbar^2}{2m_{BV}^*}(0.8)^2 k_0^2 = 1\ eV$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{1\ eV - E_g}{\frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*}(0.2)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_{BV}^*}(0.8)^2}} = 3.03 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

Esercizio 3

La massa di conduzione è data dalla media armonica dei vari contributi:

$$\frac{6}{m_c} = \frac{4}{m_t^*} + \frac{2}{m_l^*} \ \rightarrow \ m_c = 6 \cdot \left(\frac{4}{m_t^*} + \frac{2}{m_l^*}\right)^{-1} = 0.27\ m_e$$

La mobilità elettronica è data da:

$$\mu_n = \frac{q\tau_m}{m_c^*} = 651 \frac{cm^2}{Vs}$$

Esercizio 4

La concentrazione di elettroni in banda di conduzione è data da:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} g(E) f(E) dE$$

Come ragionevole approssimazione, consideriamo la statistica di Fermi-Dirac unitaria fino al livello di Fermi, e nulla dopo (approssimazione a 0 K):

$$n = \int_{E_c}^{E_F} g(E) dE$$

Per un metallo tridimensionale, la densità equivalente di stati è data da:

$$g_{3D}(E) = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{E - E_c}1$$

$$n = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2\hbar^3}\int_{E_c}^{E_c+E_F} \sqrt{E - E_c}\ dE = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2\hbar^3}\left[\frac{2}{3}(E - E_c)^{\frac{3}{2}}\right]_{E_C}^{E_C+E_F} = \frac{(2m^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{2}{3}(E_F - E_C)^{\frac{3}{2}}$$

$$n = 1.28 \cdot 10^{19}\ cm^{-3}$$

Esercizio 5

La corrente nella barretta è data da:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\rho L} = \frac{V}{L}\sigma = \frac{V}{L}\left(qp\mu_p + qn\mu_n\right) = \frac{qVn_i}{L}(\mu_p + \mu_n)$$

La concentrazione intrinseca varia in temperatura come:

$$n_i \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

La mobilità segue la regola di Mathiessen:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_{ph}} + \frac{1}{\mu_i}$$

Essendo il silicio intrinseco, non si ha contributo da impurezze ionizzate, pertanto:

$$\mu \simeq \mu_{ph} \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

Conseguentemente:

$$I \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \cdot T^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

$$I(500\,K) = I(300\,K) e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{500}-\frac{1}{300}\right)} = 571.4\,mA$$

Nel caso in cui il silicio fosse compensato, la concentrazione dei portatori sarebbe ancora circa pari a quella intrinseca. Cambierebbe invece la mobilità, che adesso dovrebbe includere anche il contributo di impurezze ionizzate, e pertanto la sua dipendenza in temperatura.

Esercizio 6

Il tempo medio fra i fenomeni di scattering corrisponde al tempo di rilassamento del momento, che determina la mobilità elettronica:

$$\mu = \frac{q\tau_m}{m^*}$$

La mobilità si può ricavare a partire dalla velocità:

$$v_e = \mu F \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{v_e}{F} = 250\,\frac{cm^2}{Vs}$$

La velocità è riferita ai portatori a fondo banda, quindi consideriamo il fondo della banda per il calcolo della massa efficace:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}} = \frac{\hbar^2}{2\gamma \cdot 2a \cdot 2a \cdot \cos(2ka)} = \frac{\hbar^2}{8\gamma a^2} = 0.48\,m_e$$

Da cui:

$$\tau_m = \frac{m^*\mu}{q} = 68.25\,fs$$

Esercizio 7

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}} = 7.21\,\frac{pA}{cm^2}$$

Per il secondo campione vale:

$$J_2 = A_2 T_2^2 e^{-\frac{W_2}{kT_2}}$$

Come ragionevoli approssimazioni consideriamo (1) $A_2 \simeq A_{Pd} = A$ e (2) trascuriamo la dipendenza quadratica dalla temperatura. Allora:

$$e^{-\frac{W_2}{kT_2}} \simeq e^{-\frac{W_{Pd}}{kT}}$$

$$W_2 = W_{Pd} \cdot \frac{T_2}{T} = 4.3\ eV$$

Il secondo campione è in Titanio.

Esercizio 8

L'ingresso nel regime intrinseco si ha quando la concentrazione intrinseca diventa pari a quella del drogante. Nota la concentrazione intrinseca a 300 K, ricordiamo le dipendenze dalla temperatura:

$$n_i(T) = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \rightarrow n_i \propto T^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{E_g}{2kT}} \simeq e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Pertanto, nota la concentrazione a T_0 = 300 K:

$$n_i(T) = n_i(300\ K) e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{p0}}\right)}$$

Al confine fra regime estrinseco ed intrinseco, la concentrazione intrinseca è pari al drogante ionizzato, che a sua volta è circa pari alla totalità del drogante:

$$n_i(T) = N_d$$

$$-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) = \log\left(\frac{N_d}{n_i(T_0)}\right)$$

$$-\frac{E_g}{2k}\frac{1}{T} = \log\left(\frac{N_d}{n_i(T_0)}\right) - \frac{E_g}{2kT_0}$$

$$T = \frac{T_0}{1 - \log\left(\frac{N_d}{n_i(T_0)}\right) \cdot \frac{2kT_0}{E_g}} = \frac{T_0}{0.2719} = 1103\ K$$

La stima così ottenuta trascura l'aumento degli stati in banda di conduzione all'aumentare della temperatura, cioè assume che ci siano meno stati di quelli effettivamente disponibili. Per garantire la stessa concentrazione ($n_i(T) = N_d$) con un numero di stati maggiore, la statistica di occupazione deve diminuire: la temperatura effettiva di ingresso nel regime intrinseco sarà quindi più bassa di quella calcolata, che è pertanto una <u>sovrastima</u> della temperatura di transizione.

Esercizio 9

La corrente è orientata in direzione x_+. Il campione è drogato p, quindi tale corrente è principalmente di lacune ($q > 0$), che si spostano in direzione x_+. Il campo magnetico è entrante (direzione z_-), pertanto ricordando la legge di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Le particelle tendono a spostarsi, per effetto del campo magnetico, in direzione y_+. Si ha quindi accumulo di cariche positive in direzione y_+ e negativa in direzione y_-. La tensione di Hall V_H è quindi positiva in direzione y_+.

Il modulo della tensione di Hall si ricava imponendo l'uguaglianza tra la forza di Lorentz e quella elettrostatica generata dalle cariche accumulate al bordo del campione:

$$F_L = qvB = \frac{qV_H}{W} = F_{el}$$

$$V_H = vB \cdot W = \mu V_L B \frac{W}{L} = 3.6\, mV$$

La corrente nel semiconduttore è data da:

$$I = \frac{V_L}{R} = \frac{V_L}{\rho L} = \frac{V_L}{L} \cdot qp\mu_p$$

La concentrazione di lacune a temperatura ambiente è circa pari a quella del drogante N_A. Raddoppiando la temperatura di operazione, il materiale rimane in regime estrinseco, quindi la concentrazione non varia. La variazione di corrente è quindi conseguenza della variazione della mobilità.

Esercizio 10

La concentrazione di minoritari si può esprimere come:

$$p(x) = p(0) + \delta p(x) \simeq \delta p(x) = \delta p(0) \cdot e^{-\frac{x}{L_p}}$$

Dove Lp è la lunghezza di diffusione per le lacune:

$$L_p = \sqrt{\tau_p D_p} = \sqrt{\tau_p \cdot \frac{kT\mu_p}{q}} = 8.81\, \mu m$$

Il materiale torna in equilibrio quando la concentrazione di portatori in eccesso torna circa pari a quella all'equilibrio:

$$p(L) \simeq \delta p(0) \cdot e^{-\frac{L}{L_p}} \simeq p(0)$$

Dal testo si ha che $\delta p(0) = 10\, p(0)$, pertanto:

$$-\frac{L}{L_p} = \log\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$L = \log(10)\, L_p = 20.3\, \mu m$$