

Esercizio 1

Gli indici di Miller corrispondono agli inversi delle intercette sugli assi:

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 \\ \bar{y} = 3 \\ \bar{z} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = \frac{1}{\bar{x}} = 1 \\ l = \frac{1}{\bar{y}} = \frac{1}{3} \\ k = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Per convenzione, gli indici sono numeri interi. Il minimo comune multiplo delle intercette è 6, pertanto:

$$(h, l, k) = 6 \cdot \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = (6, 2, 3)$$

Esercizio 2

L'energia del fotone entrante è data da:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = 6.9 \text{ eV}$$

La tensione di stop è data da:

$$V_{stop} = \frac{hc}{\lambda} - W = \frac{1}{q}(6.9 \text{ eV} - 4.2 \text{ eV}) = 2.7 \text{ V}$$

Per effetto della tensione V_A , l'energia cinetica dell'elettrone all'anodo aumenta rispetto a quella al catodo:

$$E_{cin,A} = E_{cin,K} + qV_A = \frac{hc}{\lambda} - W + qV_A = 2.7 \text{ eV} + 0.2 \text{ eV} = 2.9 \text{ eV}$$

Conseguentemente la lunghezza d'onda di de Broglie per l'elettrone è:

$$E_{e^-} = \frac{h^2}{2m_e \lambda_{dB}^2} \rightarrow \lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_{cin,A}}} = 0.721 \text{ nm}$$

Esercizio 3

Nell'energia dello stato fondamentale E , la buca è delimitata dalle intercette:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{E}{qF_1} \\ x_2 = -\frac{E}{q|F_2|} \end{cases}$$

Dove $|F_1| = \frac{1}{q} \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \frac{\alpha}{q}$, e similmente $|F_2| = \frac{\beta}{q}$, da cui:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{E}{\alpha} \\ x_2 = -\frac{E}{\beta} \end{cases}$$

L'incertezza sulla posizione dell'elettrone è quindi data da:

$$\Delta x = x_1 - x_2 = E \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

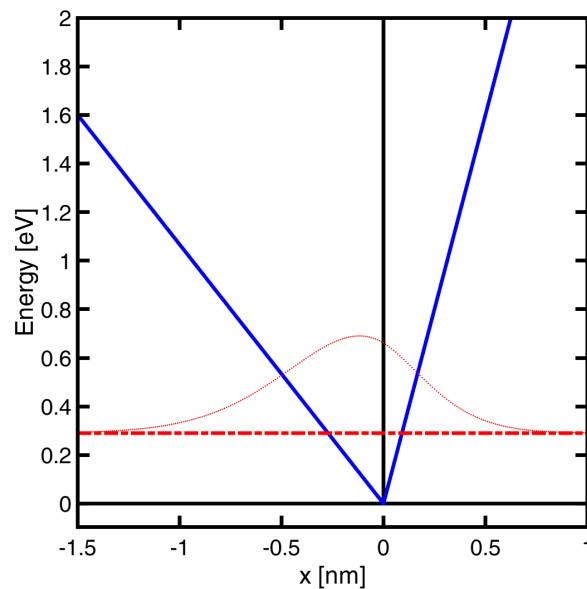
L'incertezza sulla quantità di moto è funzione dell'energia dello stato fondamentale come:

$$\Delta p = \sqrt{2m_e E}$$

Ricordando il principio di indeterminazione di Heisenberg, si può quindi stimare l'energia dello stato fondamentale come:

$$\begin{aligned} \Delta p \Delta x &\simeq \hbar \\ \sqrt{2m_e E} \cdot E \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} &\simeq \hbar \\ E &\simeq \left(\frac{\hbar\alpha\beta}{(\alpha + \beta)\sqrt{2m_e}} \right)^{\frac{2}{3}} = 290 \text{ meV} \end{aligned}$$

La parte reale dell'autofunzione presenta un massimo nell'intorno di $x = 0$, e dei punti di flesso in corrispondenza delle estremità della buca. Oltre le pareti, il decadimento è esponenziale.



Esercizio 4

Usando l'approssimazione di buca a pareti infinite, si può stimare l'energia del primo livello della buca come:

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = 0.376 \text{ eV}$$

A cui corrisponde una velocità elettronica di:

$$v = \sqrt{\frac{2E_1}{m_e}} = 3.64 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Il tempo medio di tunneling è dato da:

$$t_{tun} = \frac{1}{P_{tun}} \cdot \frac{2a}{v}$$

Da cui si ricava che la probabilità di tunneling deve essere:

$$P_{tun} = \frac{1}{t_{tun}} \cdot \frac{2a}{v} = 2.2 \cdot 10^{-4}$$

Il tunneling potrebbe essere di tipo Fowler-Nordheim o diretto. Per semplicità, si ipotizzi che il tunneling sia di tipo Fowler-Nordheim. Allora vale:

$$P_{tun} = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar F}(V_0 - E_1)^{\frac{3}{2}}}$$

Da cui si ottiene:

$$F = -\frac{1}{\ln P_{tun}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{2m_e}}{q\hbar} \cdot (V_0 - E_1)^{\frac{3}{2}} = 80.64 \frac{\text{MV}}{\text{cm}}$$

L'ipotesi di tunneling Fowler-Nordheim è valida se la barriera risultante è di tipo triangolare, ovvero se:

$$V_0 - F \cdot b < E_1$$

Essendo:

$$V_0 - F \cdot b = 0.97 \text{ eV} > 0.377 \text{ eV} = E_1$$

L'ipotesi iniziale è errata. Il tunneling è quindi di tipo diretto:

$$P_{tun} = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar F} \left[(V_0 - E_1 - qFb)^{\frac{3}{2}} - (V_0 - E_1)^{\frac{3}{2}} \right]}$$

Usando il valore di campo calcolato precedentemente, si ottiene una probabilità di tunneling effettiva pari a:

$$P'_{tun} = 3.23 \cdot 10^{-4}$$

Suggerendo che il campo effettivo da applicare sia inferiore a quello calcolato precedentemente, per garantire una probabilità di tunneling maggiore. Una stima può essere fatta, ad esempio, considerando la dipendenza approssimativa del tunneling diretto dal campo:

$$P_{tun} \propto e^{\frac{4\sqrt{2m_e}}{3\hbar F} (qFb)^2} = e^{\frac{4\sqrt{2qm_e}}{3\hbar} b^2 \cdot \sqrt{F}} = e^{\gamma\sqrt{F}}$$

Nota la probabilità di tunneling $P_{tun}(F_1) = 3.23 \cdot 10^{-4}$ per $F_1 = 80.64 \text{ MV/cm}$, e nota la probabilità di tunneling desiderata $P_{tun}(F_2) = 2.2 \cdot 10^{-4}$, si può scrivere:

$$\frac{P_{tun}(F_2)}{P_{tun}(F_1)} = e^{\gamma(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1})}$$

Da cui:

$$F_2 = \left(\sqrt{F_1} + \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{P_{tun}(F_2)}{P_{tun}(F_1)} \right) \right)^2 = 71.82 \frac{\text{MV}}{\text{cm}}$$

Corrispondente ad una probabilità di tunneling $P_{tun}(F_2) = 2.12 \cdot 10^{-4} \simeq 2.2 \cdot 10^{-4} = P_{tun}$.

(Per confronto, la soluzione numerica restituisce $F = 72.6 \frac{\text{MV}}{\text{cm}}$, ovvero un errore dell'1%).

Esercizio 5

Per determinare i punti di minimo e di massimo si calcolano le derivate prima e seconda della relazione di dispersione rispetto a k :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= E_0 \cdot \frac{3}{2} a \cdot \sin\left(\frac{3}{2}ka\right) \left(2 \cos\left(\frac{3}{2}ka\right) + 1 \right) \\ \frac{d^2E}{dk^2} &= E_0 \cdot \frac{9}{4} a^2 \cdot \left[\cos\left(\frac{3}{2}ka\right) + 2\cos^2\left(\frac{3}{2}ka\right) - 2\sin^2\left(\frac{3}{2}ka\right) \right] \end{aligned}$$

I punti di minimo si hanno quando $\frac{dE}{dk} = 0$ e $\frac{d^2E}{dk^2} > 0$. La derivata prima si annulla quando $\sin\left(\frac{3}{2}ka\right) = 0$ oppure $\cos\left(\frac{3}{2}ka\right) = -\frac{1}{2}$, da cui:

$$\sin\left(\frac{3}{2}ka\right) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}ka = 0 \vee \frac{3}{2}ka = \pm m\pi \rightarrow k = 0 \vee k = \pm \frac{2\pi}{3a}, m = 1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}ka\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}ka = \pm \frac{2}{3}m\pi \rightarrow k = \pm \frac{4m\pi}{9a}, m = 1, 2$$

Confrontando con il grafico si intuisce che tali sette punti corrispondono ai quattro massimi e tre minimi visibili. Valutando la derivata seconda si ottiene:

$$\frac{d^2E}{dk^2} \Big|_{k=\pm \frac{8\pi}{9a}} = -0.84 \frac{eV}{(\text{nm})^2} < 0$$

$$\frac{d^2E}{dk^2} \Big|_{k=\pm \frac{2\pi}{3a}} = 0.56 \frac{eV}{(nm)^2} > 0$$

$$\frac{d^2E}{dk^2} \Big|_{k=\pm \frac{4\pi}{9a}} = -0.84 \frac{eV}{(nm)^2} < 0$$

$$\frac{d^2E}{dk^2} \Big|_{k=0} = 1.68 \frac{eV}{(nm)^2} > 0$$

Pertanto i minimi sono localizzati in $k = 0$ e $k = \pm \frac{2\pi}{3a}$. La massa efficace in tali punti può essere calcolata ricordando:

$$m^*(k_0) = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk^2} \Big|_{k=k_0}}$$

Da cui si ottiene:

$$m^* \left(\pm \frac{2\pi}{3a} \right) = \frac{\hbar^2}{\frac{0.56eV}{(nm)^2}} = 0.1355 \cdot m_0$$

$$m^*(0) = \frac{\hbar^2}{\frac{1.68eV}{(nm)^2}} = 0.045 \cdot m_0$$

La mobilità è maggiore dove la massa efficace è minore, quindi in $k = 0$.

Esercizio 6

Ricordando la statistica di Fermi-Dirac:

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Con i dati dell'esercizio si ottiene:

$$P(E) = 0.4045$$

È necessario usare la statistica di Fermi-Dirac (e non la statistica di Maxwell-Boltzmann) poiché il livello impiegato si discosta molto poco dal livello di Fermi. In particolare, $E - E_F = 0.05 \text{ eV} < 0.13 \text{ eV} = kT$, facendo quindi decadere la condizione di validità dell'approssimazione MB $E - E_F \gg kT$. La risposta dipende dalla dimensionalità del problema, variando la densità di stati $g_{FD}(E)$ (e conseguentemente l'integrale di Fermi-Dirac) a seconda che il materiale sia 1D, 2D o 3D.

Esercizio 7

La densità di corrente termoionica per un metallo con funzione lavoro W è data da:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Come ragionevole approssimazione, si considera solo la dipendenza esponenziale dalla temperatura, cioè:

$$J \propto e^{-\frac{W}{kT}}$$

Supponendo $A_{Co} \simeq A_W$, deve allora valere:

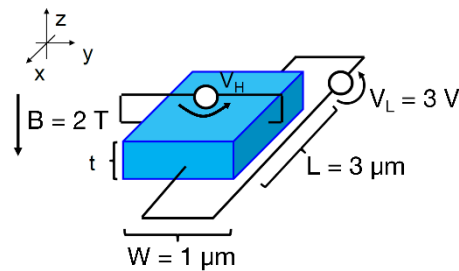
$$e^{-\frac{W_{Li}}{kT_0}} = e^{-\frac{W_V}{kT_1}}$$

Dove $T_0 = 300$ K è la temperatura ambiente e T_1 è la temperatura cercata. Risolvendo per T_1 si ottiene:

$$T_1 = \frac{W_V}{W_{Li}} T_0 = 430 \text{ K}$$

Esercizio 8

La corrente scorre in direzione x positiva; il campo magnetico è entrante nella barretta in direzione z negativa. La corrente è di lacune essendo il drogaggio del materiale di tipo p. Per effetto del campo magnetico, i portatori tendono quindi a disporsi verso y positive. La polarità della tensione V_H è indicata in figura.



All'equilibrio, le forze di Lorentz e di Coulomb si equivalgono:

$$qvB = qF_H = q \frac{V_H}{W}$$

Esprimendo la velocità come $v = \mu_p F_L = \mu_p \frac{V_L}{L}$, si ottiene l'espressione per V_H :

$$q\mu_p \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W}$$

$$V_H = \mu_p \frac{W}{L} V_L B$$

La mobilità elettronica può essere ricavata a partire dalla resistività, ricordando che:

$$\rho = \frac{1}{qp\mu_p + qn\mu_n} \simeq \frac{1}{qN_A\mu_p}$$

$$\mu_p \simeq \frac{1}{qN_A\rho} = 800 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Conseguentemente:

$$V_H = 160 \text{ mV}$$

Lo spessore del campione può essere stimato ricordando che:

$$I = \frac{V_L}{R} = \frac{V_L}{\rho \cdot \frac{L}{Wt}} = V_L \cdot qN_A \mu_p \cdot \frac{W}{L} \cdot t = qN_A \cdot \frac{V_H}{B} \cdot t$$

Da cui si ottiene:

$$t = \frac{I}{qN_A} \cdot \frac{B}{V_H} = 608.4 \text{ nm}$$

Esercizio 9

In regime di freeze-out, la concentrazione di portatori n è data da:

$$n = \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}} e^{-\frac{E_C - E_D}{2kT}}$$

La densità di stati in banda di conduzione a 4 K può essere ricavata da quella a temperatura ambiente ricordando le dipendenze dalla temperatura:

$$N_C \propto T^{\frac{3}{2}}$$

$$N_C(4 \text{ K}) = N_C(300 \text{ K}) \left(\frac{3 \text{ K}}{300 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Conseguentemente:

$$N_D = \frac{2n^2}{N_C} e^{-\frac{E_C - E_D}{kT}} = 2.57 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

Esercizio 10

La concentrazione di elettroni tende a diminuire nel tempo secondo:

$$n(t) = n' \cdot e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

Al contempo, ad ogni istante vale:

$$n(t) = n_i e^{-\frac{E_i - F_n(t)}{kT}}$$

Da cui si può ricavare la posizione del quasi-livello di Fermi nel tempo come:

$$F_n(t) = E_i + kT \cdot \ln\left(\frac{n(t)}{n_i}\right)$$

Al tempo $t_1 = 0$ si ha:

$$n(0) = n' = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$F_n(0) = 1.07 \text{ eV}$$

Al tempo $t_2 = 75 \text{ ns}$:

$$n(t_2) = n' \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau_n}} = 2.23 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$F_n(t_2) = 1.035 \text{ eV}$$

Al tempo $t_3 = 2 \text{ } \mu\text{s}$ la relazione iniziale fornisce:

$$n(t_3) = n' \cdot e^{-\frac{t_3}{\tau_n}} = 42.5 \text{ cm}^{-3}$$

Essendo $n(t_3) \ll \frac{n_i^2}{N_A}$, la relazione non descrive più accuratamente la concentrazione di portatori minoritari, essendo il sistema ormai tornato in equilibrio. Pertanto:

$$n(t_3) = \frac{n_i^2}{N_A} = 2.1 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$$

Ed il quasi-livello di Fermi per gli elettroni coincide quindi con il livello di Fermi del sistema. Pertanto:

$$F_n(t_3) \simeq E_F = E_i - kT \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right) = 0.08 \text{ eV}$$