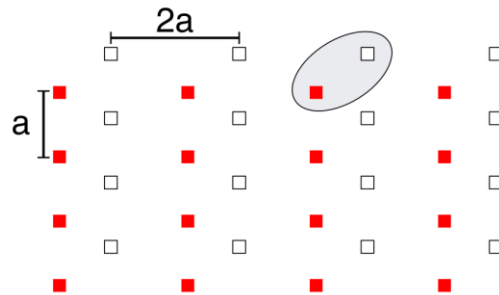


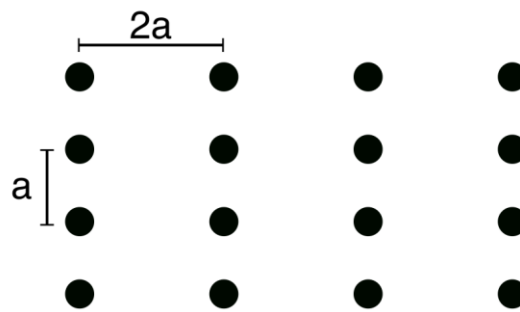
Esercizio 1

Si consideri il sistema cristallino in Fig. 1. È un reticolo di Bravais? In caso negativo, identificare una possibile combinazione base-reticolo. Noto $a = 1 \text{ nm}$, determinare la densità atomica superficiale.

Non è un reticolo di Bravais. Una possibile base è data dalla coppia bianco-rosso:



Da cui ci si riconduce a un reticolo rettangolare:



Conseguentemente:

$$\rho_s = \frac{N_{at}}{A_{cell}} = \frac{(N_{at} \cdot N_{basi})}{a \cdot 2a} = \frac{2 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)}{2a^2} = \frac{1}{a^2} = 10^{18} \text{ m}^{-2} = 10^{14} \text{ cm}^{-2}$$

Esercizio 2

Si consideri un reticolo cubico semplice di passo $a = 1 \text{ nm}$. Determinare la massima lunghezza d'onda $\lambda_{\max}$ per la quale si osserva almeno un picco di diffrazione. Supponendo quindi di illuminare il cristallo con un fascio luminoso di energia $E = 10 \text{ keV}$, determinare gli angoli di diffrazione per il piano avente intercette sugli assi $\{2, 3, 2\}$.

Ricordando la condizione di diffrazione di Bragg:

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

Massimizzando l'espressione si ottiene:

$$\lambda_{\max} = \max\left(\frac{2d \sin \theta}{n}\right) = 2d = 2 \text{ nm}$$

Il fascio luminoso impiegato ha lunghezza d'onda:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{hc}{E} = 0.12 \text{ nm}$$

Per determinare la distanza interplanare, occorre ricostruire gli indici di Miller del piano considerato.

Note le intercette sugli assi:

$$\{2, 3, 2\} \rightarrow \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow 6 \cdot \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \rightarrow (323)$$

La distanza interplanare per i piani (323) è quindi data da:

$$d_{323} = \frac{a}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{a}{\sqrt{22}} = 0.213 \text{ nm}$$

Gli angoli di diffrazione sono quindi localizzati in:

$$\theta_n = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{2d_{323}}\right)$$

Il numero dei picchi di diffrazione è facilmente ricavabile imponendo:

$$\frac{n\lambda}{2d_{323}} \leq 1 \rightarrow n \leq \frac{2d_{323}}{\lambda} = 3.43 \rightarrow n = 1, 2, 3$$

Gli angoli corrispondenti sono quindi:

$$\theta_1 = 16.93^\circ \quad \theta_2 = 35.64^\circ \quad \theta_3 = 60.94^\circ$$

Esercizio 3

Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico in cui un target in platino ($W = 5.65 \text{ eV}$) viene illuminato con un fascio luminoso di energia $E = 7 \text{ eV}$. Determinare (a) la tensione di stopping V_{stop} e (b) la tensione V_A da applicare affinché gli elettroni fotoemessi incidano sull'anodo con velocità $v = 10^6 \text{ m/s}$.

L'energia cinetica degli elettroni all'anodo è descritta da:

$$E_{k,a} = E_{ph} - W + qV_A$$

La tensione di stopping è definita come la tensione V_A tale che l'energia cinetica degli elettroni all'anodo è nulla, pertanto:

$$V_{\text{stop}} = \frac{1}{q}(W - E_{ph}) = -1.3 \text{ V}$$

Alla velocità richiesta, gli elettroni hanno invece energia cinetica:

$$E_k = \frac{1}{2}m_e v^2 = 2.84 \text{ eV}$$

Il contributo della tensione di accelerazione deve quindi essere pari a:

$$qV_A = E_k - E_{ph} + W = 1.49 \text{ eV}$$

Da cui si ricava la corrispondente tensione di accelerazione:

$$V_A = 1.49 \text{ V}$$

Esercizio 4

Si consideri una buca di potenziale descritta da $V(x) = \alpha|x|^{-1}$. Dopo aver stimato l'energia dei primi 3 autostati mediante il principio di indeterminazione di Heisenberg, si rappresenti la buca in un grafico cartesiano quotato.

Ricordando il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

L'indeterminazione sul momento è esprimibile come:

$$p_{min} = -\sqrt{2mE} \quad p_{max} = +\sqrt{2mE} \quad \Delta p = 2\sqrt{2mE}$$

L'indeterminazione sulla posizione è esprimibile come:

$$x_{min} = -\frac{\alpha}{E} \quad x_{max} = \frac{\alpha}{E} \quad \Delta x = \frac{2\alpha}{E}$$

Si può quindi stimare la posizione degli autostati come:

$$\Delta p \Delta x = 2\sqrt{2mE} \cdot \frac{2\alpha}{E} \simeq n\hbar$$

$$4\alpha\sqrt{2m} E^{-\frac{1}{2}} \simeq n\hbar$$

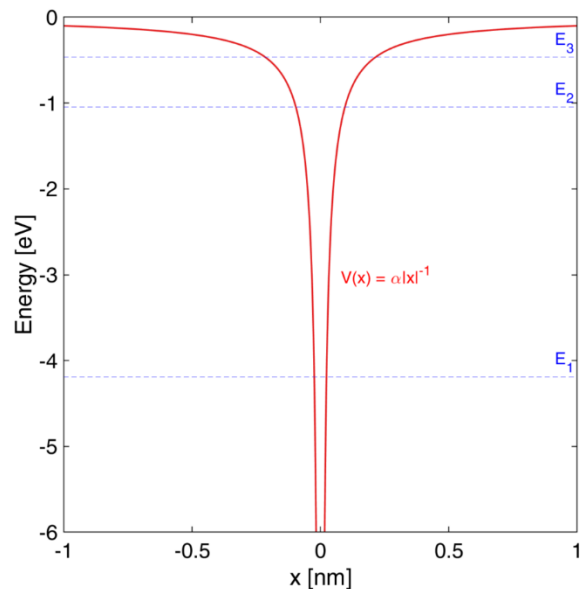
$$E_n \simeq n^{-2} \left(\frac{\hbar}{4\alpha\sqrt{2m}} \right)^{-2}$$

I primi tre autostati sono quindi localizzati in:

$$E_1 = \left(\frac{\hbar}{4\alpha\sqrt{2m}} \right)^{-2} = -4.19 \text{ eV}$$

$$E_2 = \frac{1}{4} E_1 = -1.047 \text{ eV}$$

$$E_3 = \frac{1}{9} E_1 = -0.465 \text{ eV}$$



Esercizio 5

Si consideri il sistema di buche accoppiate in **Fig. 2**. Sapendo che il secondo autostato pari ha $k_p = 6.2 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$ e che la barriera deltiforme in $x = 0$ ha ampiezza $u_0 = 10 \text{ eV} \cdot \text{nm}$, determinare la frequenza di oscillazione dello stato non-stazionario associato al secondo doppietto energetico.

La relazione di dispersione per gli autostati dispari è data da:

$$\tan(k_d a) = 0 \rightarrow k_d(n) = \frac{n\pi}{a}$$

dove a è la larghezza delle due buche, prese singolarmente, e n è l'indice del doppietto. La larghezza delle buche si può ricavare a partire dalla relazione di dispersione per gli autostati pari:

$$\tan(k_p a) = -\frac{\hbar^2 k_p}{m_e u_0}$$

Si ottiene quindi:

$$a = \frac{1}{k_p} \left[\text{atan} \left(-\frac{\hbar^2 k_p}{m_e u_0} \right) + n\pi \right]$$

Dove $n = 2$ poiché si sta considerando il secondo autostato pari. Allora:

$$a = 1 \text{ nm}$$

Da cui si ottiene:

$$k_d = \frac{2\pi}{a} = 6.247 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Lo stato non stazionario associato al doppietto oscilla con pulsazione:

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar}$$

Dove $\Delta E = E_d - E_p$. Note le energie dei due autostati:

$$E_p = \frac{\hbar^2 k_p^2}{2m} = 1.468 \text{ eV}$$

$$E_d = \frac{\hbar^2 k_d^2}{2m} = 1.49 \text{ eV}$$

Si ha quindi:

$$\omega = 3.39 \cdot 10^{13} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \leftrightarrow f_{\text{osc}} = 5.4 \text{ THz}$$

Esercizio 6

Si consideri il diagramma a bande in **Fig. 3** ($m_{BV}^* = m_0$, $m_{BC}^* = 0.1m_0$), dove un elettrone è inizialmente localizzato sull'apice della banda di valenza. A seguito di interazione con un fotone di energia $E = 1.5 \text{ eV}$ e un fonone di momento $p = 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ l'elettrone viene promosso in BC e rilassa sul fondo emettendo 15 fononi di energia media $E_{phn} = 50 \text{ meV}$. Determinare l'energia di gap e la posizione $k_{0,BC}$ del minimo della BC.

La banda di conduzione può essere descritta in approssimazione parabolica come:

$$E_c(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_{0,BC})^2}{2m_{BC}^*}$$

Dopo la prima interazione (a 3 particelle), l'elettrone è localizzato in:

$$E_c(k_1) = 1.5 \text{ eV} \quad k_1 = \frac{p_{phn}}{\hbar} = 9.48 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

A seguito del processo di termalizzazione, l'elettrone si porta sul fondo della banda di conduzione ad un'energia:

$$E_c(k_2) = 1.5 \text{ eV} - N_{phn} \cdot E_{phn} = 0.75 \text{ eV}$$
$$k_2 = k_{0,BC}$$

Dove l'energia $E_c(k_2)$ corrisponde quindi all'energia di gap. È possibile allora ricavare la posizione del fondo banda come:

$$k_1 - k_{0,BC} = \pm \sqrt{\frac{2m_{BC}^*}{\hbar^2} (E_c(k_1) - E_g)}$$
$$k_{0,BC} = k_1 \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_{BC}^* (E_c(k_1) - E_g)}$$

Considerando ad esempio la soluzione positiva si ha:

$$k_{0,BC} = 1.09 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 7

Si considerino due campioni metallici in tantalio ($W_{Ta} = 4.25$ eV) e platino ($W_{Pt} = 5.65$ eV). Determinare la temperatura T_2 a cui deve essere portato il platino per garantire la stessa densità di corrente termoionica del tantalio a $T_1 = 700$ K.

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Dove la costante A è circa identica per tutti i metalli. Imponendo l'uguaglianza per le due densità di corrente si ottiene:

$$\frac{J_{Pt}}{J_{Ta}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_{Ta}}{T_1} - \frac{W_{Pt}}{T_2}\right)} = 1$$

$$\frac{W_{Pt}}{kT_2} - \frac{W_{Ta}}{kT_1} + 2 \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0$$

Trascurando il (debole) contributo logaritmico si ha:

$$\frac{W_{Pt}}{T_2} = \frac{W_{Ta}}{T_1}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{W_{Pt}}{W_{Ta}} = 930.6 \text{ K}$$

Esercizio 8

Si consideri un campione di silicio drogato n ($N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$). Sapendo che lo stato donore dista 30 meV dalla banda di conduzione, determinare (a) la temperatura T_1 a cui il livello di Fermi E_F del materiale coincide con il livello donore E_D e (b) la temperatura T_2 a cui la concentrazione intrinseca del materiale eguaglia il drogaggio, trascurando la dipendenza dalla temperatura della densità equivalente di stati in banda di conduzione.

Ricordando la statistica di ionizzazione:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{\frac{E_F - E_D}{kT}}}$$

Quando il livello di Fermi e il livello donore coincidono si ha:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{3}$$

Ricordando che vale:

$$N_D^+ \simeq n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

Allora:

$$\frac{E_F - E_C}{k} = T \log \left(\frac{N_D^+}{N_C} \right)$$

$$T_{1 \rightarrow 2} = \frac{E_D - E_C}{k \log \left(\frac{N_D}{3N_C} \right)} = 76.17 \text{ K}$$

Analogamente, per la temperatura di transizione al regime intrinseco, trascurando la dipendenza dalla temperatura della densità equivalente di stati:

$$n_i(T) = n_i(T_0) \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \simeq n_i(T_0) \cdot e^{-\frac{E_g}{2k} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

$$\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) = -\frac{2k}{E_g} \cdot \log \left(\frac{N_D}{n_i(T_0)} \right)$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{2k}{E_g} \cdot \log \left(\frac{N_D}{n_i(T_0)} \right)$$

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_0} - \frac{2k}{E_g} \cdot \log \left(\frac{N_D}{n_i(T_0)} \right)} = 1811 \text{ K}$$

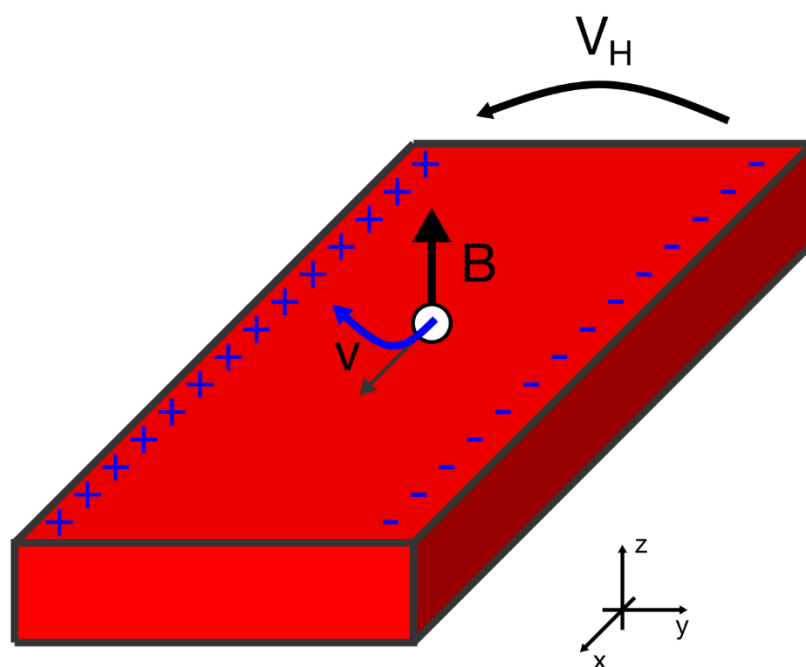
Esercizio 9

Si consideri la barretta di silicio drogato p ($N_A = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $\mu_p = 200 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$) sottoposta ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 4** ($W = 1 \text{ }\mu\text{m}$, $t = 1 \text{ }\mu\text{m}$, $L = 2 \text{ }\mu\text{m}$, $B = 1 \text{ T}$, $V_L = 1 \text{ V}$). Determinare modulo e verso della tensione trasversale V_H e della corrente I attraverso la barretta.

La barretta è drogata p, pertanto i portatori maggioritari (lacune) si muovono in direzione x_+ . Il campo magnetico è diretto come z_+ , pertanto la forza di Lorentz:

$$\mathcal{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Disloca le lacune in direzione y_- , creando un eccesso di carica positiva. Conseguentemente, in direzione y_+ si osserva una carica netta negativa. La tensione di Hall trasversale sarà quindi orientata come y_- .



Il modulo della tensione si ricava imponendo l'uguaglianza tra la forza di Lorentz e la forza elettrostatica risultante:

$$qvB = qF_T$$

$$q\mu \frac{V_L}{L} B = \frac{qV_H}{W}$$

$$V_H = \mu V_L \frac{W}{L} B = 10 \text{ mV}$$

La corrente fluisce invece in direzione x_+ . Nota la resistenza del dispositivo:

$$R = \rho \frac{L}{Wt} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{Wt} = \frac{1}{qN_A\mu_p} \frac{L}{Wt} = 625 \text{ }\Omega \quad \rightarrow \quad I = \frac{V_L}{R} = 1.6 \text{ mA}$$

Esercizio 10

Un semiconduttore di tipo n è irraggiato da una sorgente luminosa che induce una fotogenerazione uniforme nel volume del materiale. Sapendo che la concentrazione di lacune aumenta di un fattore 10^6 , determinare di quanto si sposta a temperatura ambiente il livello di quasi Fermi delle lacune F_p rispetto al livello di Fermi all'equilibrio E_F .

La concentrazione di lacune all'equilibrio a temperatura ambiente è data da:

$$p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}$$

In condizioni di fuori equilibrio, la concentrazione di lacune è data da:

$$p' = N_V e^{-\frac{F_p - E_V}{kT}}$$

Noto il rapporto fra le due concentrazioni, è possibile ricavare lo scostamento del quasi livello di Fermi per le lacune rispetto al livello di Fermi all'equilibrio come:

$$\frac{p'}{p} = 10^6 = \frac{N_V e^{-\frac{F_p - E_V}{kT}}}{N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}}} = e^{-\frac{F_p - E_V - E_F + E_V}{kT}} = e^{-\frac{F_p - E_F}{kT}}$$

$$F_p = E_F - kT \log(10^6) = E_F - 357 \text{ meV}$$