Esercizio 1

Il picco principale di diffrazione di un solido cristallino si trova ad un angolo θ=32.824°. Noto il coefficiente di dilatazione termica del materiale $\gamma = \frac{\varepsilon}{dt} = 1.3 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, dove ϵ è la variazione relativa del parametro reticolare, calcolare la posizione del picco quando la temperatura viene aumentata di 50K.

Soluzione 1

In un esperimento di diffrazione di Bragg, i picchi sono localizzati dagli angoli che soddisfano l'equazione:

$$n\lambda = 2d\sin(\theta)$$

Il passo reticolare, dipendentemente dal tipo di reticolo, è esprimibile come:

$$d = \frac{a}{\alpha} \rightarrow a = \alpha d$$

Ricordando che la variazione relativa ε del passo reticolare è definita:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}$$

Noto il coefficiente di dilatazione termica, aumentando la temperatura di 50 K il nuovo passo cristallino sarà dato da:

$$a' = a + \Delta a = a + a\frac{\Delta a}{a} = a(1+\varepsilon) = a(1+\gamma\Delta T)$$

Conseguentemente, la nuova distanza interplanare sarà:

$$d' = \frac{a'}{\alpha} = d(1+\gamma\Delta T)$$

Dovrà quindi essere rispettata, alla nuova temperatura $T' = T + \Delta T$:

$$n\lambda = 2d'\sin(\theta') = 2d(1+\gamma\Delta T)\sin(\theta')$$

$$\sin(\theta') = \frac{n\lambda}{2d}\frac{1}{1+\gamma\Delta T} = \frac{\sin(\theta)}{1+\gamma\Delta T} = 0.5417$$

Da cui si ottiene infine:

$$\theta' = 32.8°$$

Esercizio 2

Si consideri un esperimento di effetto fotoelettrico in cui il catodo (W = 4.2 eV) è illuminato da un fascio di luce di lunghezza d'onda λ = 250 nm. Calcolare la lunghezza d'onda di deBroglie di un elettrone emesso dal catodo e giunto all'anodo senza tensione applicata.

Soluzione 2

In assenza di tensione applicata, l'energia cinetica della particella emessa è data da:

$$E_k = E_{ph} - W = \frac{hc}{\lambda} - W = 4.97\ eV - 4.2\ eV = 0.77\ eV$$

La lunghezza d'onda di de Broglie è ricavabile come:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 1.4\ nm$$

Esercizio 3

Si consideri la buca di potenziale in **Fig. 1**, dove un elettrone è intrappolato nello stato ψ_2 ad energia $E_2 = 1.5$ eV. Calcolare la lunghezza d'onda del fotone emesso quando l'elettrone rilassa allo stato fondamentale ψ_1 ad energia $E_1 = 1$ eV. È più probabile che l'elettrone venga emesso per tunneling attraverso la barriera di sinistra o di destra?

Soluzione 3

L'energia del fotone associato corrisponde al gap fra i due livelli:

$$E_{ph} = E_2 - E_1 = 0.5\ eV$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}} = 2.48\ \mu m$$

In prima approssimazione, la probabilità di tunneling è la medesima a destra e sinistra, poiché:

$$P_t \simeq e^{-2\alpha a}$$

Dove le due barriere hanno pari spessore a e pari altezza V_1 da cui $\alpha \propto \sqrt{V_1 - E}$ è uguale per entrambe le barriere. Per un confronto più accurato, occorre considerare anche il prefattore:

$$P_t = \left(\frac{4\alpha k}{\alpha^2 + k^2}\right)^2 e^{-2\alpha a}$$

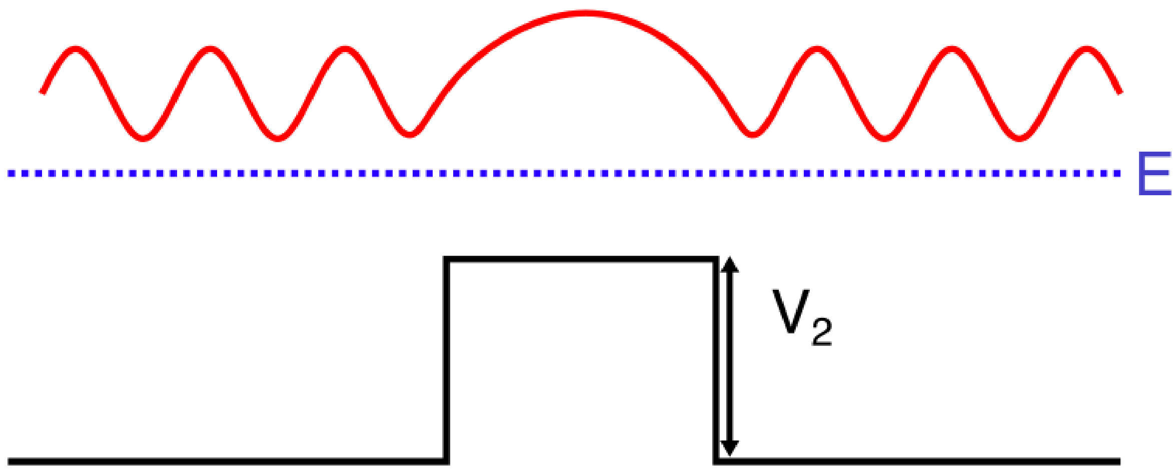
Dove si riscontra una dipendenza aggiuntiva dal momento dell'elettrone $k \propto \sqrt{E_k} = \sqrt{E - V_0}$, dove V_0 è il potenziale sottostante.

Esercizio 4

Si consideri un elettrone la cui parte reale dell'autofunzione ψ all'istante t = 0 è rappresentata in **Fig. 2**. Stimare il potenziale V(x) a cui è soggetto l'elettrone e la sua energia E, noto a = 2.5 nm.

Soluzione 4

In tutte e tre le regioni dello spazio l'autofunzione è di tipo viaggiante, pertanto sarà sempre $E > V$. In particolare, l'autofunzione è identica tra la regione 1 e 3, pertanto non sta andando incontro a fenomeni di riflessione all'interfaccia 1|2. Ne consegue che il potenziale ha forma:



Noto a è possibile ricavare la lunghezza d'onda nelle tre regioni:

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V_2)}} = 2a = 5nm$$

$$\lambda_{1,3} = \frac{\lambda_2}{4} = 1.25\ nm$$

Da cui:

$$E = \frac{h^2}{2m\lambda_{13}^2} = 0.965\ eV = E_{k1,3}$$

$$E - V_2 = \frac{h^2}{2m\lambda_2^2} = 61\ meV$$

$$V_2 = 0.904\ eV$$

Esercizio 5

Si consideri un elettrone in un oscillatore armonico quantistico con frequenza caratteristica ω = 140 Grad/s. Si calcoli il potenziale e la lunghezza d'onda del fotone emesso da un elettrone che rilassa dal primo stato eccitato ψ_1 allo stato fondamentale ψ_0. Calcolare a che temperatura deve essere portato il sistema affinché la probabilità che l'elettrone occupi ψ_1 sia metà della probabilità di occupare ψ_0, assumendo che entrambi i livelli energetici si trovino sufficientemente al di sopra dell'energia di Fermi del sistema.

Soluzione 5

Ricordando che per i livelli energetici di un oscillatore armonico quantistico descritto da $V = \frac{1}{2}\alpha x^2$ vale:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

Dove il parametro α è legato alla frequenza caratteristica come:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \;\rightarrow\; \alpha = m\omega_0^2 = 111\,\frac{meV}{\mu m^2}$$

Allora la transizione $1 \rightarrow 0$ ha energia:

$$E_{10} = \hbar\omega_0 = 92.3\,\mu eV \;\rightarrow\; \lambda_{ph} = \frac{hc}{E} = 13.5\,mm$$

La probabilità di occupazione è descritta dalla statistica di Fermi-Dirac:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Poiché entrambi i livelli considerati si trovano molto al di sopra dell'energia di Fermi, è possibile approssimare la statistica di occupazione alla statistica di Maxwell-Boltzmann:

$$f(E) \simeq e^{-\frac{E-E_F}{kT}}$$

Il rapporto tra le due probabilità pertanto vale:

$$\frac{f(E_1)}{f(E_0)} = e^{\frac{E_0-E_1}{kT}}$$

Imponendo il rapporto desiderato si può ricavare la temperatura come:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{E_0 - E_1}{kT}$$

$$T = \frac{E_1 - E_0}{k\log(2)} = 1.5\,K$$

Esercizio 6

Si consideri il semiconduttore in **Fig. 3** dove un fotone di energia hν = 2E_G viene assorbito in k_0 e un fotone di energia E_G = 1eV viene emesso da fondo banda. Sapendo che la somma degli inversi delle masse efficaci nelle due bande è 10^{31} kg^{-1}, calcolare k_0.

Soluzione 6

Il semiconduttore è a gap diretto, pertanto:

$$E_c(k) = \frac{E_g}{2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c^*}$$

$$E_v(k) = -\frac{E_g}{2} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

L'energia di gap in funzione del vettore d'onda del cristallo è data da:

$$E_g(k) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2}\left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{1}{m_v^*}\right) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

Dove la massa efficace equivalente è nota dal testo e pari a $m^* = 10^{-31}\ kg$. Sapendo che in corrispondenza di $k = k_0$ la separazione fra le bande è pari a $2E_g$, si può quindi ricavare:

$$2E_g = E_g + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m^*}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{2E_g m^*}{\hbar^2}} = \frac{\sqrt{2E_g m^*}}{\hbar} = 1.69 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

Esercizio 7

Calcolare le masse efficaci di elettrone e di lacuna nell'esercizio precedente, sapendo che la mobilità dell'elettrone è doppia di quella della lacuna. Detto F_{sat} il campo critico per la saturazione della velocità, calcolare il rapporto tra le energie acquisite da elettrone e lacuna ad un campo $F_1 < F_{sat}$ e ad un campo $F_2 > F_{sat}$.

Soluzione 7

Ricordando che la mobilità e la massa efficace sono legate a mezzo della relazione:

$$\mu = \frac{q\tau}{m^*}$$

Assumendo lo stesso tempo di rilassamento del momento, allora:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = 2 = \frac{m_v^*}{m_c^*}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{m_v^*} + \frac{1}{m_c^*} = \frac{1}{2m_c^*} + \frac{1}{m_c^*} = \frac{3}{2m_c^*} = 10^{31} kg^{-1}$$

$$m_c^* = 0.165 m_e$$

$$m_v^* = 0.33 m_e$$

In presenza di un campo inferiore a quello di saturazione, elettroni e lacune vengono accelerati ad una velocità:

$$v = \mu F$$

Pertanto acquisiscono un'energia cinetica:

$$E_e = \frac{1}{2} m_c^* \mu_n^2 F^2$$

$$E_h = \frac{1}{2} m_v^* \mu_p^2 F^2$$

$$\frac{E_e}{E_h} = \frac{m_c^*}{m_v^*} \cdot \left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Per un campo maggiore del campo di saturazione, la velocità di entrambe le particelle satura a:

$$v = v_{sat}$$

Da cui:

$$E_e = \frac{1}{2} m_c^* v_{sat}^2$$

$$E_h = \frac{1}{2} m_p^* v_{sat}^2$$

$$\frac{E_e}{E_h} = \frac{m_c^*}{m_v^*} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 8

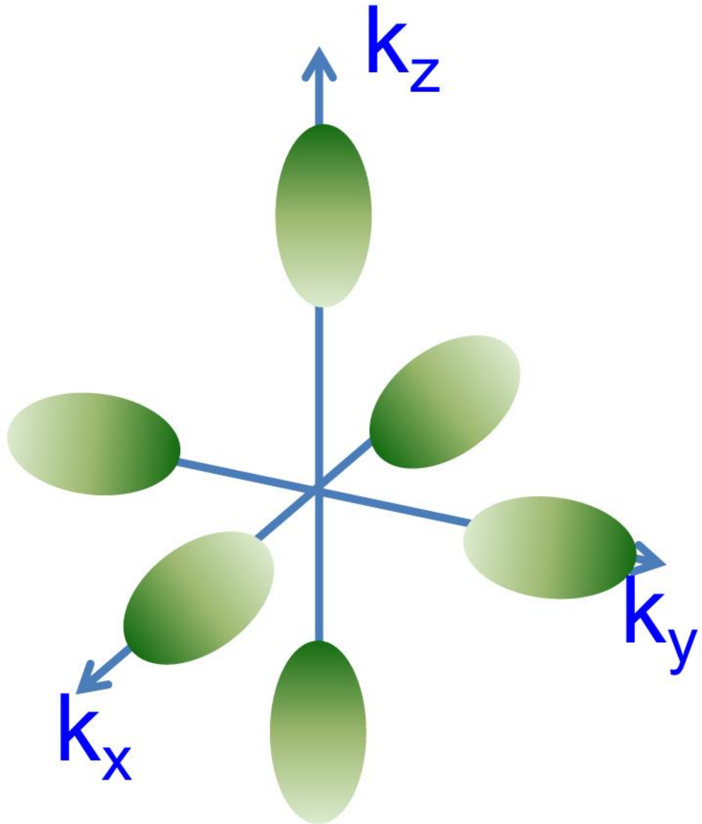
Calcolare la massa DOS m^*_{3D} nella banda di conduzione anisotropa di un semiconduttore caratterizzato da degenerazione g = 6, massa longitudinale $m^*_l = 0.5m_0$ e massa trasversale $m^*_t = 0.1m_0$. Disegnare una possibile configurazione delle valli in banda di conduzione nello spazio k.

Soluzione 8

La massa DOS è data da:

$$m^*_{DOS} = g^{\frac{2}{3}} m_t^{*\frac{2}{3}} m_l^{*\frac{1}{3}} = 0.5646\, m_0$$

Una possibile configurazione è, ad esempio, quella del Silicio:



Esercizio 9

Si consideri un campione in silicio drogato n a temperatura ambiente dove l'irraggiamento laser determina un tasso di fotogenerazione G = 10^{18} $cm^{-3}s^{-1}$ con un tempo di ricombinazione dei minoritari τ_p = 100 ns. Determinare il tempo necessario perché la concentrazione in eccesso raggiunga il valore intrinseco.

Soluzione 9

Ricordando l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{dJ_n}{dt} + G - R$$

Il campione è in circuito aperto, pertanto non c'è variazione della densità di corrente nel tempo: rimangono solo i termini di generazione e ricombinazione. Ricordando che:

$$R = \frac{\Delta n}{\tau}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = G - \frac{\Delta n}{\tau}$$

Integrando l'equazione differenziale si arriva a:

$$\Delta n(t) = G\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Imponendo $\Delta n(t) = n_i$ si ottiene:

$$t = -\tau \log\left(1 - \frac{n_i}{G\tau}\right) = 15.7\ ns$$

Esercizio 10

Si consideri una barretta di silicio (drogaggio $N_A = 10^{18}$ cm^{-3}, tempo di ricombinazione dei minoritari τ_n = 5 ns) dove un fascio laser impone una concentrazione in eccesso di portatori minoritari in superficie pari a n'(0) = 10^{16} cm^{-3}. Sapendo che la concentrazione di portatori è modificata rispetto all'equilibrio solo entro i primi 100 μm dalla superficie irraggiata a temperatura ambiente, calcolare la mobilità elettronica.

Soluzione 10

La concentrazione di minoritari in eccesso decade lungo lo spazio come:

$$\Delta n(x) = \Delta n(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

Dove $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$. Sapendo che a una distanza di 100 µm la concentrazione ritorna all'equilibrio (e pertanto l'eccesso è paragonabile con la concentrazione intrinseca), si può ricavare la lunghezza di ricombinazione come:

$$L_n = -\frac{\bar{x}}{\log\left(\frac{n_0}{\Delta n(0)}\right)} = -\frac{\bar{x}}{\log\left(\frac{n_i^2}{N_A \Delta n(0)}\right)} = 3.17 \mu m$$

Ricordando che $D_n = \frac{kT\mu_n}{q}$, si può quindi ricavare la mobilità come:

$$\mu_n = \frac{q}{kT}\frac{L_n^2}{\tau_n} = 779 \frac{cm^2}{Vs}$$