Esercizio 1

Un reticolo cristallino quadrato di passo a = 1 nm sottoposto ad irraggiamento con raggi X di energia E = 1.2 keV, rivela tre picchi di diffrazione in corrispondenza degli angoli θ_1 = 31.17°, θ_2 = 47.06°, θ_3 = 63.71°. Determinare la famiglia di piani associata ad ognuno dei picchi di diffrazione.

Soluzione 1

Per osservare un picco di diffrazione è necessario che si verifichi la condizione di interferenza costruttiva:

$$n\lambda = 2d \sin\theta$$

Dove la lunghezza d'onda della radiazione incidente è data da:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 1.035\ nm$$

Ad ogni picco di diffrazione corrisponde pertanto una distanza interplanare di:

$$d = n\frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

Per una generica famiglia di piani di Miller di indici $\{h, k, l\}$, la distanza interplanare è data da:

$$d_{hlk} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}$$

$$\sqrt{h^2 + l^2 + k^2} = 2\sin\theta\frac{a}{n\lambda}$$

Per il primo angolo si ha quindi:

$$\frac{2\sin\theta_1\, a}{\lambda} = 1 = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

Poiché h, l, e k devono essere interi, le uniche combinazioni ammesse che soddisfano l'equazione sono (100), (010), e (001), corrispondenti alla famiglia {100}.

Per il secondo angolo si ha:

$$\frac{2\sin\theta_2\, a}{\lambda} = 1.4142 = \sqrt{2} = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

Le combinazioni che soddisfano l'equazione sono pertanto (110), (101), (011), corrispondenti alla famiglia {110}.

Per il terzo angolo si ha:

$$\frac{2\sin\theta_2\, a}{\lambda} = 1.7321 = \sqrt{3} = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

L'unica combinazione che soddisfa l'equazione è (111), corrispondente alla famiglia {111}.

Esercizio 2

Un corpo nero sferico di raggio r_1 = 1 cm presenta un picco dello spettro di emissione (parametrizzato in lunghezza d'onda) per λ_1 = 1 μm. Determinare la potenza emessa dal primo corpo nero, e la temperatura di un secondo corpo nero avente raggio doppio ed emettente potenza tripla rispetto al primo corpo nero.

Soluzione 2

La temperatura del primo corpo nero si può ricavare a partire dalla legge di Wien:

$$\lambda T = c_w \quad \rightarrow \quad T = \frac{c_w}{\lambda} = 2800\ K$$

La potenza emessa da un corpo nero è descritta dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P_1 = \mathcal{A}_1 \sigma T_1^4 = (4\pi r_1^2)\sigma T_1^4 = 4.37\ kW$$

L'area del secondo corpo nero è pari a:

$$\mathcal{A}_2 = 4\pi(2r)^2 = 4\mathcal{A}_1$$

Deve pertanto valere:

$$3P_1 = 3\mathcal{A}_1 \sigma T_1^4 = \mathcal{A}_2 \sigma T_2^4 = P_2$$

$$3\mathcal{A}_1 T_1^4 = \mathcal{A}_2 T_2^4$$

$$T_2 = \left(3\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}\right)^{\frac{1}{4}} T_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} T_1 = 2606\ K$$

Esercizio 3

In un esperimento di effetto fotoelettrico un catodo in tungsteno (W = 5.4 eV) è sottoposto ad illuminazione. Nota la tensione di stopping V_{stop} = -3 V, determinare la lunghezza d'onda del fascio luminoso e la velocità dell'elettrone all'anodo in assenza di tensione applicata.

Soluzione 3

L'energia cinetica dell'elettrone fotoemesso all'anodo è descritta da:

$$E_k = E_{ph} - W + qV$$

Poiché per $V = V_{stop}$ non si osserva fotocorrente, l'energia cinetica dell'elettrone all'anodo è nulla. Pertanto:

$$E_{ph} - W + qV_{stop} = 0$$

Si può quindi ricavare l'energia del fotone entrante come:

$$E_{ph} = W - qV_{stop} = 5.4\ eV + 3\ eV = 8.4\ eV$$

Da cui la lunghezza d'onda del fascio luminoso:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}} = 147.9\ nm$$

In assenza di tensione applicata, l'energia cinetica dell'elettrone all'anodo sarà quindi data da:

$$E_k = E_{ph} - W = 3\ eV$$

Corrispondente ad una velocità dell'elettrone di:

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 1.027 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$$

Esercizio 4

Si consideri la buca di potenziale a pareti infinite in **Fig. 1**. Sapendo che il rapporto tra il numero di elettroni che popolano il secondo livello e il numero di elettroni che popolano lo stato fondamentale a T = 500 K è pari a 10^{-3}, calcolare la larghezza a della buca facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 4

Come ragionevole approssimazione, si considera la statistica di Maxwell-Boltzmann per descrivere l'occupazione dei livelli energetici della buca:

$$f_{MB}(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}}$$

Noto il rapporto fra l'occupazione del secondo e del primo livello, si può quindi scrivere:

$$\frac{f_{MB}(E_2)}{f_{MB}(E_1)} = e^{-\frac{(E_2-E_F-E_1+E_F)}{kT}} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} = 10^{-3}$$

Si può quindi ricavare la separazione fra i primi due livelli:

$$E_2 - E_1 = -kT\ln(10^{-3}) = 0.298\ eV$$

Ricordando che, per una buca a pareti infinite, l'energia dell'n-esimo livello è data da:

$$E_n = n^2\frac{h^2}{8ma^2}$$

La separazione fra i primi due livelli si può esprimere come:

$$E_{21} = (4-1)\frac{h^2}{8ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

La larghezza della buca è quindi data da:

$$a = \sqrt{\frac{3h^2}{8mE_{21}}} = 1.95\ nm$$

Esercizio 5

Si consideri la relazione di dispersione $E(k) = E_0 + E_1 \cos(4ka)$, con E_0 = 1 eV, E_1 = 0.5 eV, a = 0.5 nm. Si costruisca un pacchetto d'onda centrato in $k_0 = \frac{\pi}{4a}$ con peso g(k) gaussiano avente $\sigma_k = 10^8$ m^{-1}. Valutare la velocità di gruppo, la dispersione del pacchetto e la velocità di fase a t = 0, t = 1 ps e t = 100 ps.

Soluzione 5

La velocità di fase è data da:

$$v_f = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \frac{E(k_0)}{\hbar k_0} = \frac{E_0 + E_1 \cos(\pi)}{\hbar k_0} = \frac{E_0 - E_1}{\hbar k_0} = 0.483 \cdot 10^6\ m^{-1}$$

La velocità di gruppo è data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk}|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}(-4E_1 a \sin(4ka))|_{k=k_0} = -\frac{4E_1 a}{\hbar}\sin(\pi) = 0$$

La dispersione del pacchetto nel tempo è descritta da:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 t^2}{\alpha}}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} = (7.07\ nm)^2$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}|_{k=k_0} = \frac{1}{2\hbar}\frac{d^2E}{dk^2}|_{k=k_0} = \frac{1}{2\hbar}(-16E_1 a^2 \cos(4ka))|_{k=k_0} = \frac{8E_1 a^2}{\hbar} = 1.52 \cdot 10^{-3}\frac{m^2}{s^2}$$

Ai tempi richiesti la dispersione del pacchetto risulta pertanto:

$$\sigma_x(0) = \sqrt{\alpha} = 7.07\ nm$$

$$\sigma_x(1\ ps) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot (1\ ps)^2} = 214\ nm$$

$$\sigma_x(100\ ps) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot (100\ ps)^2} = 21.4\ \mu m$$

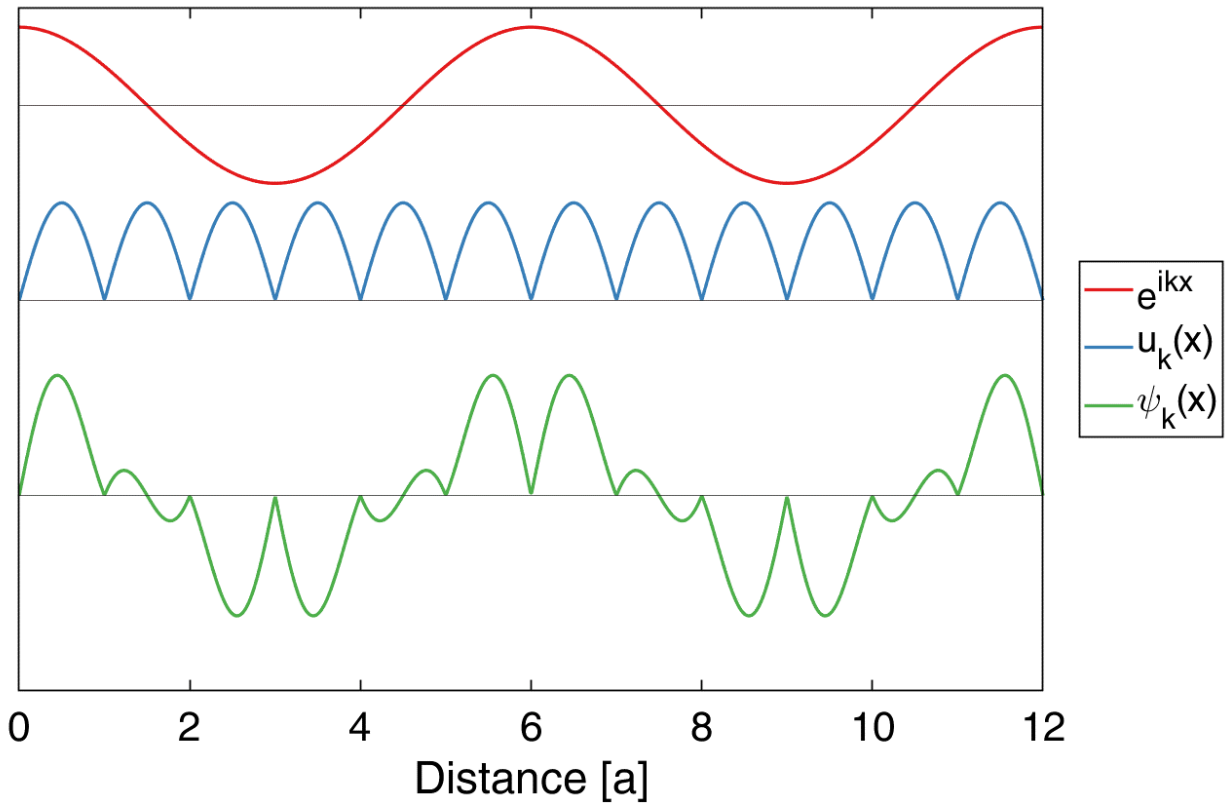
Esercizio 6

Un elettrone in un cristallo è descritto da un'autofunzione $\psi_k(x)$ con $k = 0.785 \cdot 10^9\ m^{-1}$. Sapendo che l'autofunzione $\psi_k(x)$ torna in fase dopo N = 6 passi reticolari, determinare il passo cristallino a e tracciare il profilo della parte reale della funzione inviluppo e il profilo della parte reale dell'autofunzione su 2N passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

Soluzione 6

La condizione di fase per l'elettrone nel cristallo è data da:

$$k \cdot Na = 2\pi \rightarrow a = \frac{2\pi}{Nk} = 1.334\ nm$$



Esercizio 7

Si consideri il diagramma a bande in **Fig. 2** ($m^*_v = 3m^*_c$), dove un elettrone di momento $k_0 = 10^9\ m^{-1}$ viene promosso dalla banda di valenza alla banda di conduzione grazie a un fotone di energia $E_{ph} = 1$ eV. Sapendo che l'elettrone promosso termalizza sul fondo della banda di conduzione rilasciando 10 fononi di energia media $E_{phn} = 20$ meV, determinare le masse efficaci m^*_c, m^*_v e l'energia di gap E_g.

Soluzione 7

Ricordando che, in approssimazione parabolica, le due bande possono essere descritte come:

$$E_c(k) = E_g + \frac{h^2k^2}{2m_c^*} \qquad\qquad E_v(k) = -\frac{\hbar^2k^2}{2m_v^*}$$

Il gap in funzione del momento si può scrivere come:

$$E_g(k) = E_c(k) - E_v(k) = E_g + \frac{\hbar^2k^2}{2}\left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{1}{m_v^*}\right) = E_g + \frac{\hbar^2k^2}{2m^*}$$

In corrispondenza di k_0 deve quindi valere:

$$E_g(k_0) = E_g + \frac{\hbar^2k_0^2}{2m^*} = E_{ph} = 1eV$$

Nota l'energia di termalizzazione, è possibile ricavare il contributo netto di energia in banda di conduzione:

$$E_c(k_0) - E_c(0) = E_g + \frac{\hbar^2k_0^2}{2m_c^*} - E_g = \frac{\hbar^2k_0^2}{2m_c^*} = N_{phn} \cdot E_{phn} = 0.2\ eV$$

Da cui si ricava la massa efficace in banda di conduzione:

$$m_c^* = \frac{\hbar^2k_0^2}{2 \cdot 0.2\ eV} = 0.19m_e$$

Noto dal testo che $m_v^* = 3m_c^*$:

$$m_v^* = 0.573m_e$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_c^*} + \frac{1}{m_v^*} = \frac{4}{3m_c^*} \rightarrow m^* = \frac{3}{4}m_c^* = 0.14m_e$$

Il gap vale quindi:

$$E_g = 1\ eV - \frac{\hbar^2k_0^2}{2m^*} = 0.733\ eV$$

Esercizio 8

Si considerino due campioni metallici di pari area in oro (W_{Au} = 5.3 eV) e argento (W_{Ag} = 4.26 eV). Determinare a che temperatura deve essere portato il campione in oro affinché abbia la stessa densità di corrente termoionica dell'argento a T = 400 K, facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 8

Ricordando che la densità di corrente per emissione termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Affinché i due campioni portino la stessa corrente, devono avere la medesima densità di corrente (avendo pari area):

$$\frac{J_{Ag}}{J_{Au}} = \frac{A_{Ag} T_{Ag}^2 e^{-\frac{W_{Ag}}{kT_{Ag}}}}{A_{Au} T_{Au}^2 e^{-\frac{W_{Au}}{kT_{Au}}}} = \left(\frac{A_{Ag}}{A_{Au}}\right) \cdot \left(\frac{T_{Ag}}{T_{Au}}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_{Ag}}{T_{Ag}} - \frac{W_{Au}}{T_{Au}}\right)} = 1$$

Considerando $A_{Ag} \simeq A_{Au}$ e trascurando la dipendenza parabolica:

$$\frac{W_{Ag}}{T_{Ag}} = \frac{W_{Au}}{T_{Au}}$$

$$T_{Au} = \frac{W_{Au}}{W_{Ag}} T_{Ag} = 497.6\ K$$

Esercizio 9

Si consideri il setup sperimentale di effetto Hall in **Fig. 3** (B = 1 T, L = W = 1 µm, t = 100 nm, V_L = 1 V). Sapendo che la tensione V_H = 10 mV è positiva nel verso indicato, determinare tipologia e mobilità dei portatori. Nota la corrente I_1 = 1 µA a temperatura ambiente, calcolare la corrente I_2 attraverso la barretta alla temperatura T = 350 K.

Soluzione 9

Sul portatore agiscono simultaneamente la forza di Lorentz e la forza elettrostatica:

$$\mathcal{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\mathcal{F}_E = q\vec{F_t}$$

All'equilibrio, le due forze si equivalgono in modulo:

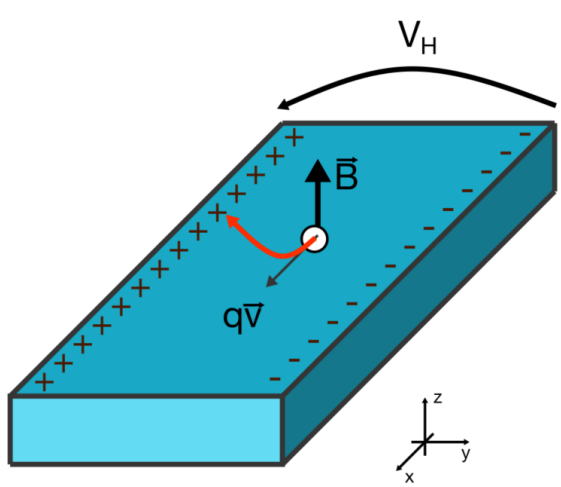
$$\mathcal{F}_L = qvB = \frac{qV_H}{W} = \mathcal{F}_E$$

$$\mu F_l B = V_H/W$$

$$\mu \frac{V_L}{L} B = \frac{V_H}{W}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L}\frac{L}{W} B = 100 \frac{cm^2}{Vs}$$

Per identificare il tipo di portatore, notiamo che il campo magnetico è diretto come z_+. Poiché la corrente fluisce in direzione x_+, il prodotto $q\vec{v}$ sarà orientato nella stessa direzione (per gli elettroni $q < 0, \vec{v} \propto x_- \rightarrow q\vec{v} \propto x_+$, per le lacune $q > 0, \vec{v} \propto x_+ \rightarrow q\vec{v} \propto x_+$). Pertanto, il portatore viene deflesso in direzione y_-, dove il segno della tensione di Hall rivela un accumulo di carica positiva. Il portatore è pertanto una lacuna, e la barretta è drogata p:



La corrente attraverso la barretta è data da:

$$I = \frac{V_L}{R} = \frac{V_L}{\rho \cdot \frac{L}{Wt}} = \frac{V_L \cdot Wt}{\rho \cdot L} \simeq \frac{V_L}{L} \cdot Wt \cdot q\mu_p N_A$$

Al variare della temperatura, la concentrazione di portatori resterà circa costante e pari al drogaggio (essendo la nuova temperatura ancora compatibile con il regime estrinseco). Diversamente, la mobilità cambierà in ragione dell'aumentata velocità dei portatori, che diminuisce l'impatto dello scattering da impurezze ionizzate:

$$\mu(T_2) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} \mu(T_1)$$

La corrente sarà pertanto pari a:

$$I_2 = \frac{V_L}{L} Wt \cdot q\mu N_A \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = I \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.26 \cdot I = 1.26\ \mu A$$

Esercizio 10

Un semiconduttore di tipo n è irraggiato da una sorgente luminosa che induce una fotogenerazione uniforme nel volume del materiale. Sapendo che la concentrazione di lacune aumenta di un fattore 10^4, determinare di quanto si sposta a temperatura ambiente il livello di quasi Fermi delle lacune F_p rispetto al livello di Fermi all'equilibrio E_F.

Soluzione 10

La concentrazione di lacune in condizioni di equilibrio è data da:

$$p_0 = n_i e^{\frac{E_i - E_F}{kT}}$$

In condizioni di fuori equilibrio, la concentrazione di lacune è esprimibile come:

$$p' = n_i e^{\frac{E_i - F_p}{kT}}$$

Noto il rapporto tra le due concentrazioni, è quindi possibile ricavare lo spostamento del quasi livello di Fermi rispetto all'equilibrio:

$$\frac{p'}{p_0} = e^{\frac{E_F - F_p}{kT}} = 10^4$$

$$F_p - E_F = -kT \ln(10^4) = -0.238\ eV$$

$$F_p = E_F - 0.238\ eV$$