Esercizio 1

La massa efficace è definita come:

$$m^*(k) = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$$

Dove:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = -E_0 \cdot 4a^2 \cdot \cos(2ka)$$

Pertanto:

$$m^*(k) = -\frac{\hbar^2}{4E_0 a^2 \cos(2ka)}$$

Affinché la massa efficace sia positiva deve valere:

$$\cos(2ka) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < 2ka < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \ \vee \ -\frac{\pi}{2} - 2n\pi < 2ka < -\frac{3\pi}{2} - 2n\pi$$

$$\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right) < 2ka < \pi\left(2n + \frac{3}{2}\right) \ \vee \ -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + 2n\right) < 2ka < -\pi\left(2n + \frac{3}{2}\right)$$

Per n = 0 si ha quindi:

$$\frac{\pi}{4a} < k < \frac{3\pi}{4a} \ \vee \ -\frac{3\pi}{4a} < k < -\frac{\pi}{4a}$$

Per n = 1 si ha quindi:

$$\frac{5\pi}{4a} < k < \frac{7\pi}{4a} \ \vee \ -\frac{7\pi}{4a} < k < -\frac{5\pi}{4a}$$

Che è fuori dalla FBZ. Pertanto gli unici intervalli validi sono:

$$\frac{\pi}{4a} < k < \frac{3\pi}{4a} \ \vee \ -\frac{3\pi}{4a} < k < -\frac{\pi}{4a}$$

La massa efficace è infinita quando $\cos(2ka) = 0$, ovvero:

$$2ka = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Per n = 0, $k = \pm\frac{\pi}{4a}$. Per n = 1, $k = \pm\frac{3\pi}{4a}$. Per n = 2, $k = \pm\frac{5\pi}{4a}$, che è fuori dalla FBZ. Sono pertanto validi solo i valori per n = 0, 1.

Esercizio 2

La statistica di occupazione per gli elettroni è data da:

$$f_{FD} = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Conseguentemente, la statistica di non-occupazione è la complementare:

$$\bar{f}_{FD} = 1 - f_{FD} = \frac{e^{\frac{E-E_F}{kT}}}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Noto E-EF = -0.5 eV, è possibile ricavare la temperatura del sistema tale che $\bar{f}_{FD} = 10^{-4}$:

$$\bar{f}_{FD} + \bar{f}_{FD} e^{\frac{E-E_F}{kT}} = e^{\frac{E-E_F}{kT}}$$

$$e^{\frac{E-E_F}{kT}} = \frac{\bar{f}_{FD}}{1 - \bar{f}_{FD}}$$

$$T = \frac{E - E_F}{k \log\left(\frac{\bar{f}_{FD}}{1 - \bar{f}_{FD}}\right)} = 629.1\ K$$

Esercizio 3

In approssimazione parabolica, la relazione di dispersione per le due bande si può scrivere:

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2}{2m_c^*}(k - k_0)^2$$

$$E_V(k) = -\frac{\hbar^2}{2m_v^*}k^2$$

Il processo è a tre particelle, pertanto l'elettrone si muove da $k_{init} = 0$ (apice della banda di valenza) a $k_{fin} = \bar{k}$ grazie al contributo di momento fornito da un fonone. Il contributo energetico è invece fornito interamente dal fotone coinvolto, pertanto:

$$E_C(k_{fin}) - E_V(k_{init}) = E_{ph}$$

$$E_g + \frac{\hbar^2}{2m_c^*}\left(k_{fin} - k_0\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_v^*}k_{init}^2 = E_{ph}$$

$$k_{fin} = k_0 \pm \sqrt{\frac{2m_c^*\left(E_{ph} - E_g\right)}{\hbar^2}} = k_0 \pm 7.24 \cdot 10^8\ m^{-1}$$

Considerando ad esempio la soluzione positiva, allora:

$$k_{fin} = 2.024 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

Il contributo complessivo di momento fornito dal fonone è pari a:

$$k_{phn,1} = k_{fin} - k_{init} = 2.024 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

$$p_{phn,1} = \hbar k = 2.13 \cdot 10^{-25}\ kg \cdot \frac{m}{s}$$

Dopo la transizione, l'elettrone si trova in BC ad energia:

$$E = E_{init} + \Delta E_{V \to C} = 0 + E_{ph} = 1.5\ eV$$

Per rilassare sul fondo della banda deve disperdere energia pari a:

$$\Delta E_{therm} = E - E_C(k_0) = E - E_g = 0.2\ eV$$

Pertanto i fononi coinvolti nel processo di termalizzazione hanno energia media:

$$< E_{phn} > = \frac{\Delta E_{therm}}{N_{phn}} = 10\ meV$$

Considerando alternativamente la soluzione negativa allora:

$$k_{fin} = 5.76 \cdot 10^8\ m^{-1} \qquad k_{phn,1} = 5.76 \cdot 10^8\ m^{-1} \qquad p_{phn,1} = 6.078 \cdot 10^{-26}\ kg \cdot \frac{m}{s}$$

Rimane invece invariata l'energia media dei fononi nel processo di termalizzazione.

Esercizio 4

La massa DOS si ricava imponendo che il volume totale degli ellissoidi anisotropi corrispondenti alle valli della banda di conduzione sia pari al volume di un unico minimo isotropo di massa m^*_{DOS}. Pertanto, per la banda di conduzione:

$$m^*_{DOS,c} = \left(g^2 {m^*_t}^2 m^*_l\right)^{\frac{1}{3}} = 0.553\, m_0$$

Per la banda di valenza, occorre considerare entrambe le bande di lacune pesanti e leggere, entrambe isotrope. Pertanto:

$$m^*_{DOS,v} = \left({m^*_{hh}}^{\frac{3}{2}} + {m^*_{lh}}^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.34\, m_0$$

Per la massa di conduzione in BC occorre considerare i contributi di ciascun minimo rispetto alla direzione del campo applicato. Nonostante la diversa disposizione dei minimi rispetto ai materiali caratterizzati da valli lungo Γ-X, decomponendo un campo lungo le bisettrici degli ottanti si osserveranno sempre al netto 2 contributi di massa longitudinale e 4 contributi di massa trasversale:

$$\frac{1}{m^*_{cond,n}} = \frac{\frac{4}{m^*_t} + \frac{2}{m^*_l}}{6} = \frac{2}{3m^*_t} + \frac{1}{3m^*_l} = \frac{2m^*_l + m^*_t}{3m^*_l m^*_t}$$

$$m^*_{cond,n} = \frac{3m^*_l m^*_t}{2m^*_l + m^*_t} = 0.12\, m_0$$

Per la massa di conduzione in BV occorre invece pesare i due contributi di lacune pesanti e leggere rispetto al loro contributo alla densità di stati totale, ovvero:

$$\frac{1}{m^*_{cond,p}} = \left(\frac{m^*_{lh}}{m^*_{DOS,v}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m^*_{lh}} + \left(\frac{m^*_{hh}}{m^*_{DOS,v}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m^*_{hh}} = \frac{{m^*_{lh}}^{\frac{1}{2}} + {m^*_{hh}}^{\frac{1}{2}}}{\left(m_{DOS,v}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$m^*_{cond,p} = \frac{\left(m_{DOS,p}\right)^{\frac{3}{2}}}{{m^*_{lh}}^{\frac{1}{2}} + {m^*_{hh}}^{\frac{1}{2}}} = 0.254\, m_0$$

Esercizio 5

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Dove la costante A è circa identica per tutti i metalli. Imponendo l'uguaglianza per le due densità di correnti si ottiene:

$$\frac{J_2}{J_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)} = 1$$

Come ragionevole approssimazione, si può trascurare la dipendenza parabolica dalla temperatura. Pertanto:

$$\frac{W_1}{T_1} = \frac{W_2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{W_2}{W_1} T_1 = 525\ K$$

(Una soluzione numerica fornisce $T = 521\ K$, confermando la validità dell'approssimazione).

Esercizio 6

La concentrazione elettronica in un materiale è data da:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g(E) f(E) dE$$

Per un metallo tridimensionale, la densità di stati è pari a:

$$g(E) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2}$$

La statistica di occupazione è nominalmente la statistica di Fermi-Dirac:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

A 0 K la statistica corrisponde a un gradino, ovvero:

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E \leq E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases}$$

Pertanto:

$$n = \int_{E_C}^{E_F} \frac{m^*}{\pi\hbar^2}\, dE = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \cdot [E]_{E_C}^{E_F}$$

$$n = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \cdot (E_F - E_C) = 8.33 \cdot 10^{14}\ cm^{-2}$$

Aumentando la temperatura, la concentrazione elettronica nel materiale non varia essendo un metallo. Deve pertanto rimanere costante l'integrale del prodotto fra la densità di stati e la statistica di occupazione. Sebbene la statistica di occupazione si "rilassi", essendo la densità di stati indipendente dall'energia il totale di nuovi stati "non occupati" a bassa energia ($E < E_F$) e quelli "occupati" ad alta energia ($E > E_F$) sono sempre uguali, mantenendo quindi costante l'integrale. Pertanto, non si osserverà discostamento del livello di Fermi dal valore a 0 K.

Esercizio 7

La concentrazione intrinseca per un semiconduttore è data da:

$$n_i = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\, e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Il testo fornisce le densità di stati equivalenti a temperatura ambiente. Poiché la concentrazione intrinseca desiderata è quella a T = 600 K, occorre tenere conto della dipendenza dalla temperatura:

$$n_i(600\ K) = \sqrt{N_C(300\ K)N_V(300\ K)}\ \left(\frac{600}{300}\right)^{1.5} e^{-\frac{E_g}{2k\cdot 600}} = 4.81 \cdot 10^9\ cm^{-3}$$

La mobilità elettronica si ricava a partire dal tempo di rilassamento del momento. Per gli elettroni è specificata la massa di conduzione, pertanto:

$$\mu_n = \frac{q\tau_m}{m_{c,cond}} = 900\frac{cm^2}{V\cdot s}$$

Considerando come fenomeno di scattering prevalente quello fononico, allora:

$$\mu_n(600\ K) = \ \mu_n(300\ K) \cdot \left(\frac{600}{300}\right)^{-\frac{3}{2}} = 318.2\frac{cm^2}{Vs}$$

Esercizio 8

La temperatura di transizione fra il regime di freeze-out e il regime estrinseco è quella per cui il livello di Fermi è localizzato esattamente in corrispondenza del livello donore ($E_D = E_F$). Ricordando la statistica di ionizzazione per i donori, ciò corrisponde ad avere:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}} = \frac{N_D}{3}$$

Fintantoché il materiale non si trova in regime intrinseco, inoltre, si può approssimare la concentrazione di portatori in banda:

$$n \simeq N_D^+ = \frac{N_D}{3}$$

È pertanto possibile ricavare la posizione del livello di Fermi:

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} = \frac{N_D}{3}$$

$$E_F = E_C + kT \log\left(\frac{N_D}{3N_C}\right) = E_C - 16.08\, meV$$

Dove per la densità di stati in banda di conduzione occorre considerare:

$$N_C(75\, K) = N_C(300\, K) \cdot \left(\frac{75}{300}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.4 \cdot 10^{19}\, cm^{-3}$$

Ricordando che $E_F = E_D$ essendo al confine fra F-O ed estrinseco, è quindi possibile ricavare l'energia di legame:

$$E_C - E_D = E_C - E_F = 16\, meV$$

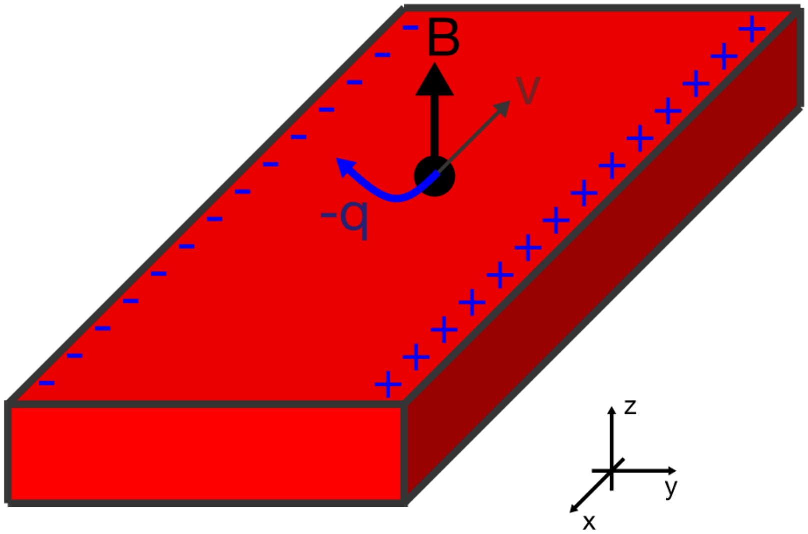
La temperatura T2 per cui la concentrazione intrinseca eguaglia il drogaggio (transizione estrinseco-intrinseco) si ha quando:

$$n_i(T) = n_i(300\, K) \cdot \left(\frac{T}{300}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{300}\right)} = N_D$$

Trascurando la dipendenza polinomiale e considerando solo quella esponenziale:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{300} - \frac{2k}{E_g} \log\left(\frac{N_D}{n_i(300)}\right)} = 2040\, K$$

Esercizio 9



Il campo magnetico è orientato verso z_+. La corrente si muove in direzione x_+, pertanto il moto degli elettroni è nella direzione opposta: la velocità dei portatori è quindi diretta verso x_-. Infine, l'elettrone ha carica negativa, pertanto la forza di Lorentz agisce in direzione y_-. Poiché il semiconduttore è drogato n, si avrà accumulo di carica negativa in direzione y_-. Pertanto, la tensione trasversale sarà positiva in direzione y_+.

A stato stazionario deve valere il bilancio, in modulo, tra la forza di Lorentz e la forza elettrostatica nella direzione trasversale:

$$\mathcal{F}_L = qvB = \frac{qV_H}{W} = \mathcal{F}_{el}$$

Ricordando che la velocità del portatore è legata al campo longitudinale a mezzo della mobilità:

$$q\mu_n \frac{V_L}{L} B = \frac{qV_H}{W}$$

$$V_H = \mu_n B \frac{W}{L} V_L = 4\ mV$$

La corrente attraverso la barretta è data da:

$$I = \frac{V_L}{R} = \frac{V_L}{\rho \frac{L}{Wt}} = qN_D\mu_n \frac{V_L}{L} Wt = 1.28\ \mu A$$

Esercizio 10

Ricordando l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{q}\frac{\partial J_p}{\partial x} + G_p - R_p = \frac{1}{q}\frac{\partial J_p}{\partial x} + G_p - \frac{p}{\tau_p}$$

La barretta è in circuito aperto, pertanto $J_p = 0$, da cui:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = G_p - \frac{p}{\tau_p}$$

A stato stazionario la concentrazione deve essere pari a:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow p = G_p\tau_p = 10^{12}\ cm^{-3} \gg p_0 = \frac{n_i^2}{N_D} = 210\ cm^{-3}$$

Essendo la concentrazione in eccesso comunque trascurabile rispetto al drogaggio:

$$p \ll N_D = \ 10^{18}\ cm^{-3},$$

il materiale è in regime di debole iniezione.