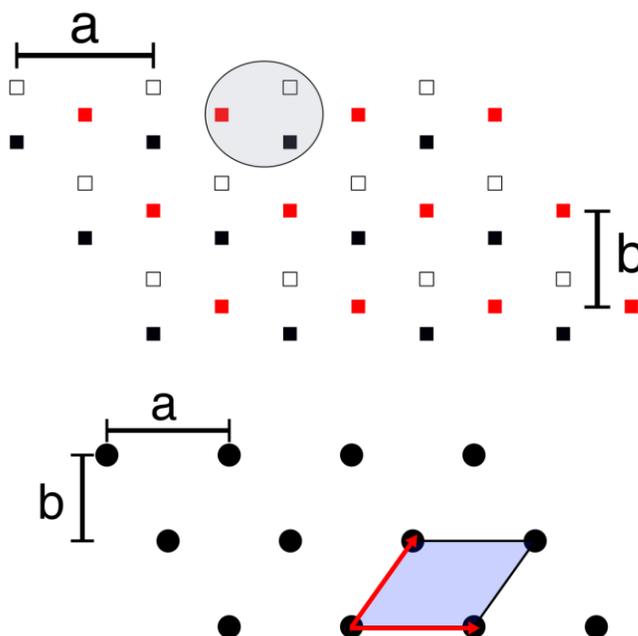


Esercizio 1

Il reticolo non è di Bravais. Identificando come base la terna bianco-rosso-nero, è possibile ricondursi a un reticolo obliquo:



L'area della cella è data da:

$$A_{cell} = a \cdot b = 5.13 \text{ (nm)}^2$$

Ogni cella ha 4 basi ciascuna condivise fra 4 celle. Ogni base è triatomica, pertanto:

$$N_{\frac{at}{cell}} = N_{\frac{at}{base}} \cdot N_{\frac{base}{cell}} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

La densità atomica superficiale è quindi pari a:

$$\rho_{at} = \frac{N_{\frac{at}{cell}}}{A_{cell}} = 5.85 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-2} = 5.85 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$$

Esercizio 2

Per stabilire se i due operatori commutano occorre determinare il corrispondente commutatore:

$$\begin{aligned} [\hat{O}_1, \hat{O}_2]\Psi &= (\hat{O}_1\hat{O}_2 - \hat{O}_2\hat{O}_1)\Psi = \left(-xi\hbar \frac{\partial \cdot}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial(x \cdot)}{\partial x}\right)\Psi \\ &= -xi\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial(x\Psi)}{\partial x} = -xi\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\hbar \left(\Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = i\hbar \Psi \end{aligned}$$

I due operatori commutano se il commutatore è nullo, il che vale solo se $\Psi = 0$. Pertanto gli operatori non commutano.

Esercizio 3

Per $V_A < -2V$ non si osserva fotocorrente, pertanto $V_A = -2V$ corrisponde alla tensione di stopping. In tali condizioni, all'anodo del dispositivo si avrà:

$$E_{k,a} = E_{ph} - W - q|V_A| = 0$$

La radiazione incidente ha pertanto energia:

$$E_{ph} = W + q|V_A| = 7.65 \text{ eV}$$

Da cui la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}} = 162 \text{ nm}$$

Esercizio 4

Ricordando il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Imponendo ad es. $\Delta p \Delta x = n\hbar$, e calcolando:

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = 2 \left(\frac{E}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Delta p = p_{max} - p_{min} = 2\sqrt{2mE}$$

Si ottiene:

$$\frac{4\sqrt{2m}}{a^{\frac{1}{\beta}}} \cdot E^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}\right)} = n\hbar$$

$$E = n^{\frac{2\beta}{\beta+2}} \cdot \left(\frac{\hbar a^{\frac{1}{\beta}}}{4\sqrt{2m}} \right)^{\frac{2\beta}{\beta+2}}$$

Affinché gli autovalori seguano una progressione $n^{6/5}$ deve quindi valere:

$$\frac{2\beta}{\beta+2} = \frac{6}{5}$$

$$10\beta = 6\beta + 12$$

$$\beta = 3$$

Lo stato fondamentale ($n = 1$) ha energia pari a:

$$E = \left(\frac{\hbar a^{\frac{1}{3}}}{4\sqrt{2m}} \right)^{\frac{6}{5}} = 0.1 \text{ eV}$$

Il valore del parametro α è quindi:

$$\alpha = \left(E^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{4\sqrt{2m}}{\hbar} \right)^3 = 27.11 \frac{\text{eV}}{(\text{nm})^3}$$

Esercizio 5

Le probabilità di riflessione e trasmissione devono complessivamente assommare all'unità, ovvero:

$$P_T + P_R = 1$$

Sapendo che $P_R = 10^8 P_T$, si può ricavare la probabilità di trasmissione:

$$P_T = \frac{1}{1 + 10^8} \simeq 10^{-8}$$

La probabilità di trasmissione per la barriera rettangolare, in approssimazione WKB, è pari a:

$$P_T = e^{-2\alpha a}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Pertanto:

$$\alpha = -\frac{\log(P_T)}{2a}$$

$$\sqrt{V_0 - E} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{\log(P_T)}{2a}$$

$$E = V_0 - \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot \log^2(P_T) = 4.19 \text{ eV}$$

Esercizio 6

In approssimazione parabolica, la relazione di dispersione per le due bande si può scrivere:

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2}{2m_c^*} (k - k_0)^2$$

$$E_V(k) = -\frac{\hbar^2}{2m_v^*} k^2$$

Il processo è a tre particelle, pertanto l'elettrone si muove da $k_{init} = 0$ (apice della banda di valenza) a $k_{fin} = \bar{k}$ grazie al contributo di momento fornito da un fonone. Il contributo energetico è invece fornito interamente dal fotone coinvolto, pertanto:

$$E_C(k_{fin}) - E_V(k_{init}) = E_{ph}$$

$$E_g + \frac{\hbar^2}{2m_c^*} (k_{fin} - k_0)^2 + \frac{\hbar^2}{2m_v^*} k_{init}^2 = E_{ph}$$

$$k_{fin} = k_0 \pm \sqrt{\frac{2m_c^*(E_{ph} - E_g)}{\hbar^2}} = k_0 \pm 7.24 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

Considerando ad esempio la soluzione positiva, allora:

$$k_{fin} = 2.024 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Il contributo complessivo di momento fornito dal fonone è pari a:

$$k_{phn,1} = k_{fin} - k_{init} = 2.024 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$p_{phn,1} = \hbar k = 2.13 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dopo la transizione, l'elettrone si trova in BC ad energia:

$$E = E_{init} + \Delta E_{V \rightarrow C} = 0 + E_{ph} = 1.5 \text{ eV}$$

Per rilassare sul fondo della banda deve disperdere energia pari a:

$$\Delta E_{therm} = E - E_C(k_0) = E - E_g = 0.2 \text{ eV}$$

Pertanto i fononi coinvolti nel processo di termalizzazione hanno energia media:

$$\langle E_{phn} \rangle = \frac{\Delta E_{therm}}{N_{phn}} = 10 \text{ meV}$$

Considerando alternativamente la soluzione negativa allora:

$$k_{fin} = 5.76 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \quad k_{phn,1} = 5.76 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \quad p_{phn,1} = 6.078 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Rimane invece invariata l'energia media dei fononi nel processo di termalizzazione.

Esercizio 7

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Dove la costante A è circa identica per tutti i metalli. Imponendo l'uguaglianza per le due densità di corrente si ottiene:

$$\frac{J_2}{J_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)} = 1$$

Come ragionevole approssimazione, si può trascurare la dipendenza parabolica dalla temperatura. Pertanto:

$$\frac{W_1}{T_1} = \frac{W_2}{T_2}$$
$$T_2 = \frac{W_2}{W_1} T_1 = 525 \text{ K}$$

(Una soluzione numerica fornisce $T = 521 \text{ K}$, confermando la validità dell'approssimazione).

Esercizio 8

La concentrazione elettronica in un materiale è data da:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g(E) f(E) dE$$

Per un metallo tridimensionale, la densità di stati è pari a:

$$g(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$$

La statistica di occupazione è nominalmente la statistica di Fermi-Dirac:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

A 0 K la statistica corrisponde a un gradino, ovvero:

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E \leq E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases}$$

Pertanto:

$$n = \int_{E_C}^{E_F} \frac{m^*}{\pi \hbar^2} dE = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \cdot [E]_{E_C}^{E_F}$$
$$n = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \cdot (E_F - E_C) = 8.33 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$$

Aumentando la temperatura, la concentrazione elettronica nel materiale non varia essendo un metallo. Deve pertanto rimanere costante l'integrale del prodotto fra la densità di stati e la statistica di occupazione. Sebbene la statistica di occupazione si "rilassi", essendo la densità di stati indipendente dall'energia il totale di nuovi stati "non occupati" a bassa energia ($E < E_F$) e quelli "occupati" ad alta energia ($E > E_F$) sono sempre uguali, mantenendo quindi costante l'integrale. Pertanto, non si osserverà discostamento del livello di Fermi dal valore a 0 K.

Esercizio 9

La concentrazione intrinseca per un semiconduttore è data da:

$$n_i = \sqrt{N_c(T)N_v(T)} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Il testo fornisce le densità di stati equivalenti a temperatura ambiente. Poiché la concentrazione intrinseca desiderata è quella a $T = 600$ K, occorre tenere conto della dipendenza dalla temperatura:

$$n_i(600\text{ K}) = \sqrt{N_c(300\text{ K})N_v(300\text{ K})} \left(\frac{600}{300}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k \cdot 600}} = 4.81 \cdot 10^9\text{ cm}^{-3}$$

La mobilità elettronica si ricava a partire dal tempo di rilassamento del momento. Per gli elettroni è specificata la massa di conduzione, pertanto:

$$\mu_n = \frac{q\tau_m}{m_{c,cond}} = 900 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$$

Considerando come fenomeno di scattering prevalente quello fononico, allora:

$$\mu_n(600\text{ K}) = \mu_n(300\text{ K}) \cdot \left(\frac{600}{300}\right)^{-\frac{3}{2}} = 318.2 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Esercizio 10

Ricordando l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} + G_p - R_p = \frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} + G_p - \frac{p}{\tau_p}$$

La barretta è in circuito aperto, pertanto $J_p = 0$, da cui:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = G_p - \frac{p}{\tau_p}$$

A stato stazionario la concentrazione deve essere pari a:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow p = G_p \tau_p = 10^{12} \text{ cm}^{-3} \gg p_0 = \frac{n_i^2}{N_D} = 210 \text{ cm}^{-3}$$

Essendo la concentrazione in eccesso comunque trascurabile rispetto al drogaggio:

$$p \ll N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3},$$

il materiale è in regime di debole iniezione.