Esercizio 1

Si consideri un cristallo cubico semplice con passo a = 1 nm sottoposto ad esperimento di diffrazione di Bragg. Dopo aver determinato la massima lunghezza d'onda affinché si possano osservare dei picchi di diffrazione, si calcolino tutti gli angoli di diffrazione per i piani {111} quando il cristallo è illuminato con λ = 0.5 nm.

Ricordando la condizione di interferenza costruttiva nella diffrazione di Bragg:

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

La massima lunghezza d'onda si ottiene imponendo:

$$\lambda_{max} = \frac{2d\sin\theta}{n} = (n = 1, \sin\theta = 1, d = a) = 2a = 2\,nm$$

Per i piani {111}, la distanza interplanare è data da:

$$d_{111} = \frac{a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Pertanto:

$$\theta_n = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)$$

Il numero di picchi di diffrazione si ricava imponendo:

$$\frac{n\lambda}{2d} \leq 1 \rightarrow n \leq \frac{2a}{\lambda\sqrt{3}} = 2.3 \rightarrow n_{max} = 2$$

Gli angoli corrispondenti sono:

$$\theta_1 = 25.65°$$

$$\theta_2 = 60°$$

Esercizio 2

Si considerino un corpo nero BB_1 (P = 1 W, T = 800 K) e tre corpi C_2, C_3, C_4 di area pari a BB_1 (P_2 = 1.6 W, P_3 = 1.26 W, P_4 = 2 W, T_2 = T_3 = 900 K, $\lambda_{peak,4}$ = 2.943 µm). Determinare quali tra C_2, C_3, C_4 sono dei corpi neri, motivando opportunamente la risposta.

La potenza emessa da un orifizio di un corpo nero è descritta dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma A T^4$$

Preso a riferimento il corpo nero BB1, per l'i-esimo corpo deve quindi valere:

$$\frac{P_i}{P_1} = \left(\frac{T_i}{T_1}\right)^4$$

Per il corpo C_2 si ha:

$$\frac{1.6}{1} = \left(\frac{900}{800}\right)^4 = 1.6$$

Per il corpo C_3 si ha:

$$1.26 \neq \left(\frac{900}{800}\right)^4 = 1.6$$

Per il corpo C4, si può ricavare la temperatura del corpo a partire dalla legge di Wien:

$$\lambda_{peak} T = c_w$$

$$T_4 = \frac{c_w}{\lambda_{peak,4}} = 951{,}4\ K$$

$$\frac{P_4}{P_1} = 2 = \left(\frac{951.4}{800}\right)^4 = 2$$

Pertanto solo C_2 e C_4 sono dei corpi neri.

Esercizio 3

Si consideri il profilo di potenziale riportato in **Fig. 1** (V_0 = 2 eV), dove un fascio elettronico incide sulla discontinuità di potenziale da sinistra verso destra. Sapendo che il flusso riflesso e trasmesso hanno pari ampiezza, determinare l'energia E del fascio.

Nota la proporzione tra flusso riflesso e trasmesso è possibile calcolare il coefficiente di riflessione:

$$|T|^2 + |R|^2 = 1 \rightarrow |R|^2 = \frac{1}{2}$$

Il coefficiente di riflessione è definito:

$$|R|^2 = \left(\frac{k - k'}{k + k'}\right)^2$$

Dove k è il vettore d'onda prima della discontinuità e k' è il vettore d'onda dopo la discontinuità:

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

$$k' = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Sia $\alpha = \frac{k}{k'}$. Allora:

$$\left(\frac{k'(\alpha - 1)}{k'(\alpha + 1)}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 1}}{1} = 3 \pm \sqrt{8}$$

Essendo $k' > k$ poiché l'energia cinetica è maggiore dopo la discontinuità, deve essere $\alpha < 1$. Occorre quindi considerare la soluzione negativa:

$$\alpha = \frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} = \left(3 - \sqrt{8}\right) = 0.1716$$

$$E(1 - 0.1716^2) = V_0$$

$$E = \frac{V_0}{0.9706} = 2.06\ eV$$

Esercizio 4

Si consideri la buca di potenziale di larghezza a = 1 nm in **Fig. 2**, dove il riferimento energetico E = 0 è posto sull'apice della buca di profondità V_0 = 4 eV. Determinare numero e posizione degli autostati confinati all'interno della buca in approssimazione di buca a pareti infinite. Successivamente, stimare la lunghezza di penetrazione del primo autostato all'interno della regione di barriera.

Gli autostati della buca sono collocati, in approssimazione di buca rettangolare a pareti infinite, alle energie:

$$E_n = -V_0 + \frac{h^2}{8ma^2}n^2$$

Dove il termine $-V_0$ tiene conto della posizione del fondo della buca. I livelli consentiti sono quindi quelli per cui vale.

$$E_n \leq 0$$

$$n \leq \sqrt{\frac{V_0 \cdot 8ma^2}{h^2}} = \frac{2a}{h}\sqrt{2V_0 m} = 3.25$$

Pertanto sono validi n = 1, 2, 3. Gli autostati corrispondenti saranno:

$$E_1 = -4\ eV + 377\ meV = -3.62\ eV$$

$$E_2 = -4\ eV + 1.5\ eV = -2.5\ eV$$

$$E_3 = -4\ eV + 3.39\ eV = -0.61\ eV$$

Per conferma, per n = 4 l'autostato dovrebbe trovarsi a $E_4 = -4\ eV + 6.03\ eV = 2.03\ eV > 0$, che è pertanto fuori dalla buca.

Per stimare la lunghezza di penetrazione del primo autostato all'interno della barriera occorre calcolare:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(0 - E_1)}}{\hbar} = 9.736 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

Da cui la lunghezza di penetrazione:

$$x_p = \frac{2}{\alpha} = 0.205\ nm$$

Esercizio 5

Due pacchetti d'onda gaussiani centrati in $k_0 = 10^9$ m^{-1} con $\sigma_{k,1} = 10^8$ m^{-1} e $\sigma_{k,2} = 5 \cdot 10^8$ m^{-1} vengono lanciati nello stesso istante in un mezzo caratterizzato da una relazione di dispersione $E(k) = E_0(1 + \cos(4ka))$ con a = 1 nm, E_0 = 1 eV. Determinare il tempo t affinché i due pacchetti abbiano la medesima dispersione spaziale.

La dispersione spaziale di un pacchetto nel tempo è descritta da:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha}}$$

Il parametro α dipende dalla dispersione del pacchetto nello spazio k:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2}$$

Il parametro β dipende invece dalla relazione di dispersione:

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{1}{2\hbar}\frac{d^2 E}{dk^2} = \frac{1}{2\hbar}(-\mathrm{E}_0 16a^2 \cos(4ka)) = -\frac{8E_0 a^2}{\hbar}\cos(4ka)$$

Entrambi i pacchetti sono centrati in $k_0 = 10^9\ m^{-1}$, pertanto:

$$\beta = -7.9 \cdot 10^{-3}\,\frac{m^2}{s}$$

Viceversa:

$$\alpha_1 = 5 \cdot 10^{-17}\ m^2 = (7.07\ nm)^2$$

$$\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-18}\ m^2 = (1.41\ nm)^2$$

Imponendo:

$$\sigma_{x,1}(t) = \sqrt{\alpha_1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha_1}} = \sqrt{\alpha_2 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha_2}} = \sigma_{x,2}(t)$$

Si può ricavare il tempo t come:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta^2 t^2 \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) = \beta^2 t^2 \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2}$$

$$t = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta^2}} = 1.26\ fs$$

Esercizio 6

Un cristallo caratterizzato da una relazione di dispersione $E(k) = E_0(1 - \cos(ka))$ con E_0 = 0.5 eV, a = 2 nm è sottoposto ad un campo elettrico F = 10 kV/cm. Considerando lo stato di fondo banda, determinare la posizione spaziale del pacchetto dopo un tempo t = 100 ps in assenza di fenomeni di scattering.

In assenza di fenomeni di scattering si ha:

$$\Delta k(t) = \frac{qF}{\hbar} t$$

Lo stato di fondo banda è localizzato in corrispondenza dell'energia minima:

$$\frac{dE}{dk} = E_0 a \cdot \sin(ka) = 0 \rightarrow k = 0, \pm \pi/a$$

Nei punti $k = \pm\frac{\pi}{a}$ la relazione di dispersione ha energia E = 2E_0. Viceversa, nel punto k = 0 si ha E(0) = 0: il fondo banda è pertanto localizzato a k = 0. Nello spazio k il pacchetto pertanto è descritto da:

$$k(t) = k_0 + \frac{qF}{\hbar} t = \frac{qF}{\hbar} t$$

La posizione del pacchetto si può ricavare a partire dalla definizione della velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk} = \frac{E_0 a}{\hbar}\sin(ka)$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{E_0 a}{\hbar}\sin(ka)\, dt = \int_0^t \frac{E_0 a}{\hbar}\sin(ka)\, dt = \int_0^t \frac{E_0 a}{\hbar}\sin\left(\frac{qFa}{\hbar}t\right) dt = \frac{E_0 a}{\hbar}\left[-\frac{\hbar}{qFa}\cos\left(\frac{qFa}{\hbar}t\right)\right]_0^t$$

$$x(t) - x(0) = \frac{E_0}{qF}\left(1 - \cos\left(\frac{qFa}{\hbar}t\right)\right)$$

Dopo un tempo t = 100 ps il pacchetto è pertanto localizzato in:

$$x(t) = x(0) - 638\, nm$$

Esercizio 7

Si considerino due campioni metallici (W_1 = 5 eV). Sapendo che il secondo campione a temperatura T_2 = 500 K è caratterizzato dalla stessa densità di corrente termoionica del primo campione a temperatura T_1 = 400 K, determinare la funzione lavoro W_2 del secondo campione.

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Dove la costante A è circa identica per tutti i metalli. Imponendo l'uguaglianza per le due densità di corrente si ottiene:

$$\frac{J_2}{J_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)} = 1$$

$$\frac{W_2}{kT_2} - \frac{W_1}{kT_1} + 2\log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0$$

$$W_2 = W_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} + 2kT_2 \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 6.25\ eV - 19.3\ meV = 6.23\ eV$$

Esercizio 8

Una barretta di silicio intrinseco a temperatura T_1 = 300 K sottoposta ad una tensione V_1 = 1 V porta una corrente I_1 = 100 μA. Determinare la temperatura T_2 affinché la barretta porti la medesima corrente quando è sottoposta ad una tensione V_2 = 0.5 V, supponendo di rimanere in entrambi i casi in regime di velocità lineare.

La corrente nella barretta è descritta da:

$$I = \frac{V}{R(T)}$$

Noti i dati del problema, si impone:

$$I_1 = \frac{V_1}{R(T_1)} = I_2 = \frac{V_2}{R(T_2)} = \frac{\left(\frac{V_1}{2}\right)}{R(T_2)}$$

$$R(T_2) = \frac{R(T_1)}{V_1} \cdot \frac{V_1}{2} = \frac{R(T_1)}{2}$$

Ricordando che per il materiale intrinseco vale:

$$R(T) = \frac{1}{qn_i(T)\left(\mu_n(T) + \mu_p(T)\right)} = \frac{1}{qn_i(T)\mu(T)}$$

Dove la mobilità è limitata dallo scattering fononico in assenza di drogante, e quindi:

$$n_i(T) \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

$$\mu(T) \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

Allora:

$$R(T) \propto \frac{1}{T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \cdot T^{-\frac{3}{2}}} = e^{\frac{E_g}{2kT}}$$

Pertanto:

$$\frac{R(T_2)}{R(T_1)} = e^{\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{2k}{E_g} \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \frac{2k}{E_g} \log\left(\frac{1}{2}\right)} = 309.93\ K \simeq 310\ K$$

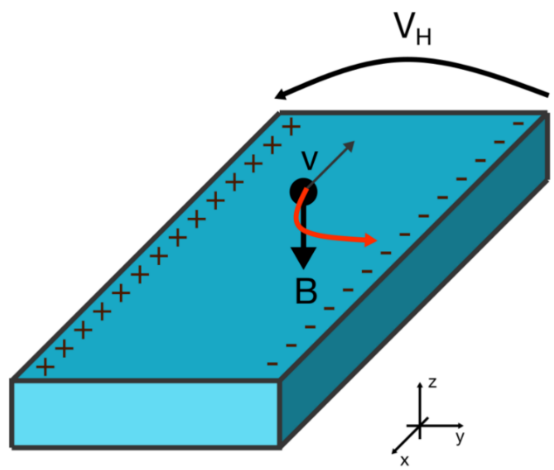
Esercizio 9

Si consideri il setup sperimentale di effetto Hall in **Fig. 3** (W = 1 μm, t = 1 μm, L = 2 μm, B = 0.5 T, V_L = 1 V). Sapendo che la tensione V_H = 10 mV è positiva nel verso indicato e che la corrente è pari a I = 1 μA, determinare tipologia, concentrazione e mobilità dei droganti.

Lo spostamento dei portatori è dovuto alla forza di Lorentz:

$$\mathcal{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Il campo magnetico è diretto come z_-. La corrente fluisce in direzione x_+. Per le lacune la velocità $\vec{v}$ sarà quindi orientata come x_+ con q > 0. Viceversa, per gli elettroni la velocità $\vec{v}$ sarà orientata come x_- con q < 0. I portatori maggioritari saranno quindi, al netto, delocalizzati in direzione y_+ per effetto della forza di Lorentz. Essendo la tensione di Hall positiva in direzione y_-, in direzione y_+ si dovrà avere accumulo di carica negativa. I portatori maggioritari sono pertanto elettroni: il materiale è drogato n.



Imponendo il bilancio tra forza di Lorentz e forza elettrostatica:

$$qvB = qF_T$$

$$q\mu\frac{V_L}{L}B = q\frac{V_H}{W}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L}\frac{L}{W}\frac{1}{B} = 400\frac{cm^2}{Vs}$$

La concentrazione di droganti si può ricavare a partire dalla corrente:

$$I = \frac{V}{R} = \sigma V \cdot \frac{Wt}{L} = qN_D\mu_n V\frac{Wt}{L}$$

$$N_D = I \cdot \frac{L}{Wt} \cdot \frac{1}{q\mu_n V} = 3.125 \cdot 10^{20}\ m^{-3} = 3.125 \cdot 10^{14}\ cm^{-3}$$

Esercizio 10

Una barretta di silicio drogata p (NA = 1018 cm-3, τn = 1 ps, μn = 400 cm2V-1s-1) è sottoposta ad illuminazione in corrispondenza del piano x = 0, generando una concentrazione di minoritari in eccesso δn(0) = 1010 cm-3 che viene mantenuta in ogni istante successivo. Riportare in un grafico quotato l'andamento dei quasi livelli di Fermi per elettroni e lacune e la concentrazione dei minoritari lungo la barretta.

La concentrazione di minoritari si può esprimere come:

$$n(x) = n_0 + \delta n(x) = n_0 + \delta n(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

Dove:

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} = \sqrt{\frac{kT\mu_n}{q}\tau_n} = 32\ nm$$

Ricordando che, in condizioni di fuori equilibrio, deve valere:

$$n(x) = n_i e^{-\frac{F_n(x)-E_i}{kT}} \qquad p(x) = n_i e^{-\frac{E_i - F_p(x)}{kT}}$$

E constatato che il materiale è in regime di debole iniezione:

$$n_0 = \frac{n_i^2}{N_A} = 2.1 \cdot 10^2\ cm^{-3} \ll \delta n(0) = 10^{10}\ cm^{-3} \ll N_A = 10^{18}\ cm^{-3}$$

Allora si avrà:

$$p(x) \simeq N_A \to F_p(x) \simeq E_F = E_i - kT \log\left(\frac{N_A}{n_i}\right) = E_i - 467.2\ meV$$

$$n(x) \simeq \delta n(x) \to F_n(x) \simeq E_i + kT \log\left(\frac{\delta n(x)}{n_i}\right) = E_i + kT \log\left(\frac{\delta n(0)}{n_i}\right) - kT \cdot \frac{x}{L_n}$$

L'approssimazione è valida finché $\delta n(x) \geq n_0$, ovvero fino a:

$$x_{lim} = -L_n \log\left(\frac{n_0}{\delta n(0)}\right) = 565.72\ nm$$