

Soluzione appello 2 – 21/07/2022

Esercizio 1

Si consideri un esperimento di effetto fotoelettrico in cui il catodo ($W = 5 \text{ eV}$) è illuminato da un fascio di luce di lunghezza d'onda $\lambda = 180 \text{ nm}$. Determinare la tensione di accelerazione V_A da applicare affinché la velocità dell'elettrone all'anodo sia $v_e = 10^6 \text{ m/s}$ e la corrispondente lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone all'anodo.

Soluzione 1

La velocità dell'elettrone all'anodo, in approssimazione semiclassica, determina l'energia cinetica:

$$E_{k,a} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = 2.843 \text{ eV}$$

Al contempo, l'energia cinetica è data da:

$$E_{k,a} = E_{ph} - W + qV_A$$

Dove V_A è presa con il suo segno. Data la lunghezza d'onda della radiazione entrante, l'energia del fotone corrispondente è:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = 6.893 \text{ eV}$$

Pertanto la tensione di accelerazione da applicare sarà:

$$V_A = \frac{E_{k,a} - E_{ph} + W}{q} = 0.95 \text{ V}$$

La lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone all'anodo si ricava imponendo:

$$E_{k,a} = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = \frac{p_e^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e \lambda_{dB}^2}$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_{k,a}}} = 0.727 \text{ nm}$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema buca-barriera ($a = 1 \text{ nm}$, $V_0 = 3 \text{ eV}$) in **Fig. 1**. Determinare la larghezza minima b della barriera affinché il tempo medio di tunneling per un elettrone sul livello E_2 sia $t_{TUN} = 1 \text{ ps}$, usando l'approssimazione di buca a pareti infinite ai soli fini del calcolo degli autostati. Se si rimuove tale approssimazione, la larghezza necessaria sarà maggiore o minore?

Soluzione 2

In approssimazione di buca a pareti infinite, gli autostati della buca si collocano a:

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} = n^2 \cdot 376 \text{ meV}$$

Il secondo autostato è quindi posto a:

$$E_2 = 1.504 \text{ eV}$$

Il tempo medio di tunneling è dato da:

$$t_{TUN} = \frac{t_{AR}}{P_t} = 1 \text{ ps}$$

Il tempo di andata/ritorno si può stimare in approssimazione semiclassica a partire dalla velocità:

$$v_e = \sqrt{\frac{2E_2}{m_e}} = 7.27 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_{AR} = \frac{2a}{v_e} = 2.75 \text{ fs}$$

Noto il tempo medio di tunneling, ne consegue che la probabilità di tunneling deve essere:

$$P_t = \frac{t_{AR}}{t_{TUN}} = 2.7 \cdot 10^{-3}$$

Per determinare la lunghezza minima della barriera, supponiamo di essere inizialmente in condizione di tunneling Fowler-Nordheim. Allora, in approssimazione WKB, la probabilità di tunneling è data da:

$$P_t = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar F} \cdot (V_0 - E_2)^{\frac{3}{2}}} = 2.7 \cdot 10^{-3}$$

Il campo necessario sarà quindi dato da:

$$F = -\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar} \frac{(V_0 - E_2)^{\frac{3}{2}}}{\log(P_t)} = 21.19 \frac{\text{MV}}{\text{cm}}$$

Finché l'ipotesi FN rimane valida, la probabilità di tunneling rimane costante indipendentemente dalla larghezza della barriera:

$$V_0 - qFb \leq E_2 \leftrightarrow t_{TUN} = 1 \text{ ps}$$

Ovvero:

$$b \geq \frac{V_0 - E_2}{qF} = 0.706 \text{ nm}$$

Quando la condizione FN viene violata, il tunneling diventa di tipo diretto. Si può verificare facilmente che la probabilità corrispondente è sempre maggiore di quella FN a parità di campo:

$$P_{t,d} = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3qF\hbar}(\phi_i^{\frac{3}{2}} - \phi_f^{\frac{3}{2}})} \geq e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3qF\hbar}\phi_i^{\frac{3}{2}}} = P_{t,FN}$$

$$-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3qF\hbar}(\phi_i^{\frac{3}{2}} - \phi_f^{\frac{3}{2}}) \geq -\frac{4\sqrt{2m_e}}{3qF\hbar}\phi_i^{\frac{3}{2}}$$

$$\phi_f^{\frac{3}{2}} \geq 0$$

Che è sempre vera quando la condizione FN risulta violata. Pertanto, quando la larghezza di barriera scende sotto 0.706 nm, il tempo di tunneling risulta minore di 1 ps.

Se si rimuove l'approssimazione di buca a pareti infinite usata per il calcolo degli autostati, considerando quindi anche la penetrazione nella barriera, ne consegue che la nuova energia $E'_2 < E_2$. La velocità dell'elettrone decresce ($v'_e < v_e$), pertanto aumenta il tempo di andata ritorno ($t'_{AR} > t_{AR}$). Per garantire lo stesso tempo di tunneling deve aumentare anche la probabilità di tunneling ($P'_t > P_t$). Il campo da applicare sarà quindi più intenso ($F' > F$), causando uno spostamento della larghezza di soglia verso dimensioni minori ($b' < b$). La larghezza minima necessaria sarà quindi minore di quella precedentemente calcolata.

Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale del tipo $V(x) = \alpha x^\beta$. Usando il principio di indeterminazione di Heisenberg, determinare il parametro β affinché la spaziatura dei livelli energetici sia proporzionale a n^{-1} .
1. Rappresentare graficamente la buca ottenuta.

Soluzione 3

Il principio di indeterminazione di Heisenberg afferma che:

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar$$

Per una buca del tipo $V(x) = \alpha x^\beta$, le indeterminazioni su momento e posizione possono essere ad esempio scritte come:

$$\Delta x = x_{max} - x_{min} = 2 \left(\frac{E}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Delta p = p_{max} - p_{min} = 2\sqrt{2mE}$$

Da cui, introducendo la quantizzazione:

$$\Delta p \Delta x = 2\sqrt{2mE} \cdot 2 \left(\frac{E}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \geq n\hbar$$

Imponiamo ad esempio:

$$2\sqrt{2mE} \cdot 2 \left(\frac{E}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} = n\hbar$$

Allora la progressione degli autostati risulta:

$$\frac{4\sqrt{2m}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \cdot E^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}} = n\hbar$$

$$E^{\frac{\beta+2}{2\beta}} = \frac{n\hbar\alpha^{\frac{1}{\beta}}}{4\sqrt{2m}}$$

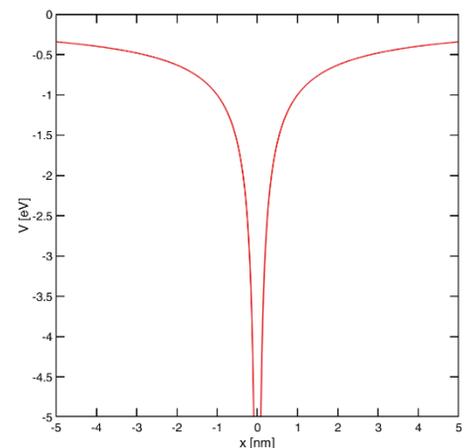
$$E = n^{\frac{\beta+2}{2\beta}} \cdot \left(\frac{n\hbar\alpha^{\frac{1}{\beta}}}{4\sqrt{2m}} \right)^{\frac{\beta+2}{2\beta}}$$

Affinché $E \propto n^{-1}$ deve quindi essere:

$$\frac{\beta+2}{2\beta} = -1$$

$$3\beta = -2$$

$$\beta = -\frac{2}{3}$$



Esercizio 4

Determinare l'energia E dell'elettrone incidente sulla barriera in **Fig. 2** ($a = 5 \text{ nm}$, $V_0 = 1 \text{ eV}$) affinché la probabilità di riflessione sia 10^3 volte quella di trasmissione.

Soluzione 4

Nota dal testo il legame fra le probabilità di riflessione e trasmissione:

$$P_r + P_t = 10^3 P_t + P_t = 1 \rightarrow P_t = 9.99 \cdot 10^{-4}$$

La probabilità di trasmissione è data da:

$$P_t = e^{-2\alpha a}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m_e(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Conseguentemente:

$$\alpha = -\frac{\log(P_t)}{a} = 1.382 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

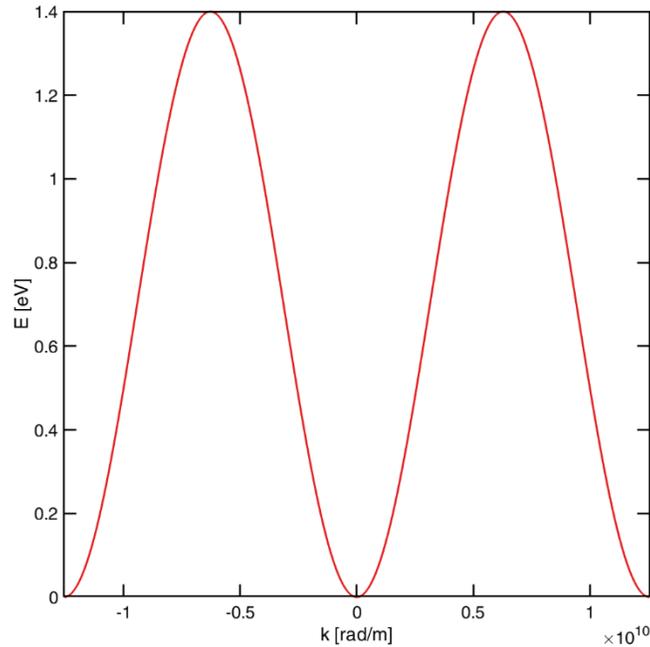
Da cui:

$$E = V_0 - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m_e} = 927.2 \text{ meV}$$

Esercizio 5

Si consideri la relazione di dispersione $E(k) = \gamma(1 - \cos(2ka))$, con $\gamma = 0.7$ eV e $a = 0.25$ nm. Dopo aver tracciato la relazione di dispersione, determinare la massa efficace nei punti di minima energia.

Soluzione 5



I punti di minimo si trovano imponendo che il coseno abbia valore massimo (minimizzando così $E(k)$):

$$\cos(2ka) = 1$$

$$2ka = 2m\pi$$

$$m = 0 \rightarrow k = 0$$

$$m = \pm 1 \rightarrow k = \pm \frac{\pi}{a}$$

La massa efficace è definita come:

$$m^*(k) = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$$

La derivata seconda della relazione di dispersione risulta:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = \frac{\partial}{\partial k} (\gamma \cdot 2a \cdot \sin(2ka)) = \gamma \cdot (2a)^2 \cdot \cos(2ka)$$

In corrispondenza dei punti di minimo si ha $\cos(2ka) = -1$, pertanto la massa efficace è uguale nei tre punti e vale:

$$m^* = -\frac{\hbar^2}{4\gamma a^2} = -0.435 m_e$$

Esercizio 6

Si consideri il semiconduttore a gap indiretto in **Fig. 3** ($m_{BV}^* = 0.7m_e$, $m_{BC}^* = 0.3m_e$, $k_{0,BV} = 0$, $k_{0,BC} = 2 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$, $E_g = 1 \text{ eV}$). Determinare la lunghezza d'onda λ del fotone necessario per promuovere dalla banda di valenza alla banda di conduzione un elettrone localizzato in $k_t = 1.405 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$. Determinare quindi il numero e il momento cristallino medio k_{phn} dei fononi di energia $E_{phn} = 15 \text{ meV}$ necessari per il processo di termalizzazione a fondo banda.

Soluzione 6

Descriviamo le bande in approssimazione parabolica:

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_{0,BC})^2}{2m_{BC}^*}$$

$$E_V(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$

Il gap di energia risulta quindi:

$$E_g(k) = E_C(k) - E_V(k) = E_g + \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{(k - k_{0,BC})^2}{m_{BC}^*} + \frac{k^2}{m_{BV}^*} \right)$$

In corrispondenza del k dove avviene la transizione, il gap (e quindi l'energia del fotone) vale:

$$E_g(k_t) = 1.152 \text{ eV} = E_{ph} \quad \rightarrow \quad \lambda_{ph} = \frac{hc}{E_{ph}} = 1.077 \mu\text{m}$$

A seguito della transizione, l'elettrone passa in banda di conduzione ad energia:

$$E_C(k_t) = 1.045 \text{ meV}$$

Per termalizzare a fondo banda, l'elettrone deve quindi disperdere energia e momento pari a:

$$\Delta E = E_C(k_t) - E_C(k_0) = 45 \text{ meV} \quad \Delta k = k_t - k_0 = -0.595 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Saranno quindi necessari:

$$N_{phn} = \frac{\Delta E}{E_{phn}} = 3 \quad \langle k_{phn} \rangle = \frac{\Delta k}{N_{phn}} = -0.198 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 7

Stimare l'energy gap di un semiconduttore sapendo che a $T = 300 \text{ K}$ la concentrazione intrinseca è pari a $n_i = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e le densità di stati equivalenti in banda di conduzione e valenza sono rispettivamente $N_C = 5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $N_V = 3.6 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

Soluzione 7

La concentrazione intrinseca è esprimibile come:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Da cui l'energy gap:

$$E_g = -2kT \cdot \log\left(\frac{n_i}{\sqrt{N_C N_V}}\right) = 1.051 \text{ eV}$$

Esercizio 8

Si consideri un esperimento di effetto Hall realizzato mediante la barretta di silicio drogata p ($N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $\mu_p = 100 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, $L = W = 10t = 1\mu\text{m}$) in **Fig. 4**. Sapendo che a una tensione longitudinale $V_L = 3 \text{ V}$ corrisponde una tensione di Hall $V_H = 40 \text{ mV}$, determinare modulo, direzione e verso del campo magnetico B e della corrente I .

Soluzione 8

La tensione longitudinale e quella trasversale sono legate dall'uguaglianza fra la forza elettrostatica e quella di Lorentz:

$$q\mu \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W}$$

Il modulo del campo magnetico è quindi dato da:

$$B = \frac{V_H}{V_L} \frac{L}{W} \frac{1}{\mu} = 1.33 \text{ T}$$

La corrente è primariamente di lacune, che quindi si muovono in direzione x_+ . La tensione di Hall misurata è positiva in direzione y_- , pertanto per effetto del campo magnetico le lacune si spostano nella stessa direzione. Ricordando l'espressione per la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Essendo \vec{F} diretta come y_- , \vec{v} diretta come x_+ , ne consegue che il campo magnetico \vec{B} deve essere orientato in direzione z_+ .

La corrente che scorre nella barretta è data da:

$$I = GV_L = \frac{\sigma W t}{L} V_L = (qN_A \mu_p) \frac{W t}{L} V_L = 48 \mu\text{A}$$

Esercizio 9

Si consideri un campione in silicio drogato n ($N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $E_C - E_D = 20 \text{ meV}$) operante in regime di freeze-out. Sapendo che quando il 50% dei droganti è ionizzato la concentrazione di portatori in banda di conduzione è $n = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, determinare la temperatura di operazione T, trascurando la dipendenza dalla temperatura della densità di stati equivalente in banda di conduzione N_C .

Soluzione 9

Si noti che la concentrazione di portatori in banda (n) differisce dalla sola componente ionizzata del drogante:

$$n = 10^{13} \text{ cm}^{-3} \neq 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} = \frac{N_D}{2} = N_D^+$$

Ciò suggerisce la presenza di una seconda specie drogante di tipo p nel materiale, in concentrazione non sufficiente a compensare il drogaggio di tipo n, che pertanto rende inapplicabile l'approssimazione $n \simeq N_D^+$, poiché staremmo trascurando la frazione di drogante accettore ionizzato. Occorre quindi procedere separatamente. Ricordiamo la statistica di ionizzazione per i donori:

$$N_{D,+} = N_D - N_{D,0} = N_D \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}} + 1} \right) = N_D \left(\frac{\frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}}}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}} + 1} \right) = \frac{N_D}{1 + 2e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}}$$

Per la concentrazione di portatori in banda di conduzione, consideriamo inizialmente l'approssimazione Maxwell-Boltzmann:

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

Possiamo quindi ricavare la posizione del livello di Fermi in funzione della temperatura:

$$-\frac{E_C - E_F}{kT} = \log\left(\frac{n}{N_C}\right)$$

$$E_F = E_C + kT \log\left(\frac{n}{N_C}\right)$$

Inserendo tale relazione nella statistica di ionizzazione e imponendo che il 50% del drogante sia ionizzato si ottiene:

$$\frac{N_{D,+}}{N_D} = \frac{1}{1 + 2e^{-\frac{E_D - E_C - kT \log\left(\frac{n}{N_C}\right)}{kT}}} = \frac{1}{1 + 2e^{\frac{E_C - E_D}{kT}} \cdot \frac{n}{N_C}}$$

$$1 + 2e^{\frac{E_C - E_D}{kT}} \cdot \frac{n}{N_C} = \frac{N_D}{N_{D,+}}$$

$$e^{\frac{E_C - E_D}{kT}} = \frac{N_C}{2n} \left(\frac{N_D}{N_{D,+}} - 1 \right)$$

$$T = \frac{E_C - E_D}{k \log\left(\frac{N_C}{2n} \left(\frac{N_D}{N_{D,+}} - 1\right)\right)} = 16.4 \text{ K}$$

Il livello di Fermi si trova quindi a:

$$E_C - E_F = -kT \log\left(\frac{n}{N_C}\right) = 20.97 \text{ meV}$$

Verifichiamo la validità dell'ipotesi Maxwell-Boltzmann. Deve essere:

$$E_C - E_F = 20.97 \text{ meV} \gg kT = 1.4 \text{ meV}$$

Quindi l'approssimazione MB è valida.

Esercizio 10

Una barretta di silicio ($N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) a temperatura ambiente contiene un eccesso di portatori minoritari $n' = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che il tempo di ricombinazione dei minoritari è $\tau_n = 40 \text{ ns}$, calcolare l'energia del quasi-livello di Fermi F_N ai tempi $t = 0 \text{ s}$, 40 ns e $1.68 \mu\text{s}$.

Soluzione 10

La concentrazione di elettroni tende a diminuire nel tempo secondo:

$$n(t) = n' \cdot e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

Al contempo, ad ogni istante vale:

$$n(t) = n_i e^{-\frac{E_i - F_n(t)}{kT}}$$

Da cui si può ricavare la posizione del quasi-livello di Fermi nel tempo come:

$$F_n(t) = E_i + kT \cdot \ln\left(\frac{n(t)}{n_i}\right)$$

Al tempo $t_1 = 0$ si ha:

$$n(0) = n' = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

$$F_n(0) = 1.07 \text{ eV}$$

Al tempo $t_2 = 40 \text{ ns}$:

$$n(t_2) = n' \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau_n}} = 3.679 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$F_n(t_2) = 1.047 \text{ eV}$$

Al tempo $t_3 = 1.68 \mu\text{s}$ la relazione iniziale fornisce:

$$n(t_3) = n' \cdot e^{-\frac{t_3}{\tau_n}} = 5.75 \text{ cm}^{-3}$$

Essendo $n(t_3) \ll \frac{n_i^2}{N_A}$, la relazione non descrive più accuratamente la concentrazione di portatori minoritari, essendo il sistema ormai tornato in equilibrio. Pertanto:

$$n(t_3) = \frac{n_i^2}{N_A} = 2.1 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-3}$$

Ed il quasi-livello di Fermi per gli elettroni coincide quindi con il livello di Fermi del sistema. Pertanto:

$$F_n(t_3) \simeq E_F = E_i - kT \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right) = 0.14 \text{ eV}$$