Esercizio 1

Un reticolo cristallino quadrato di passo a = 1 nm sottoposto ad irraggiamento con raggi X di energia E = 1.2 keV, rivela tre picchi di diffrazione in corrispondenza degli angoli θ_1 = 31.17°, θ_2 = 47.06°, θ_3 = 63.71°. Determinare la famiglia di piani associata ad ognuno dei picchi di diffrazione.

Soluzione 1

Per osservare un picco di diffrazione è necessario che si verifichi la condizione di interferenza costruttiva:

$$n\lambda = 2d\sin\theta$$

Dove la lunghezza d'onda della radiazione incidente è data da:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 1.035\,nm$$

Ad ogni picco di diffrazione corrisponde pertanto una distanza interplanare di:

$$d = n\frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

Per una generica famiglia di piani di Miller di indici $\{h, k, l\}$, la distanza interplanare è data da:

$$d_{hlk} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}$$

$$\sqrt{h^2 + l^2 + k^2} = 2\sin\theta\frac{a}{n\lambda}$$

Per il primo angolo si ha quindi:

$$\frac{2\sin\theta_1\, a}{\lambda} = 1 = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

Poiché h, l, e k devono essere interi, le uniche combinazioni ammesse che soddisfano l'equazione sono (100), (010), e (001), corrispondenti alla famiglia {100}.

Per il secondo angolo si ha:

$$\frac{2\sin\theta_2\, a}{\lambda} = 1.4142 = \sqrt{2} = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

Le combinazioni che soddisfano l'equazione sono pertanto (110), (101), (011), corrispondenti alla famiglia {110}.

Per il terzo angolo si ha:

$$\frac{2\sin\theta_2\, a}{\lambda} = 1.7321 = \sqrt{3} = \sqrt{h^2 + l^2 + k^2}$$

L'unica combinazione che soddisfa l'equazione è (111), corrispondente alla famiglia {111}.

Esercizio 2

Un corpo nero sferico di raggio r_1 = 1 cm presenta un picco dello spettro di emissione (parametrizzato in lunghezza d'onda) per λ_1 = 1 µm. Determinare la potenza emessa dal primo corpo nero, e la temperatura di un secondo corpo nero avente raggio doppio ed emettente potenza tripla rispetto al primo corpo nero.

Soluzione 2

La temperatura del primo corpo nero si può ricavare a partire dalla legge di Wien:

$$\lambda T = c_w \quad \rightarrow \quad T = \frac{c_w}{\lambda} = 2800\ K$$

La potenza emessa da un corpo nero è descritta dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P_1 = \mathcal{A}_1 \sigma T_1^4 = (4\pi r_1^2)\sigma T_1^4 = 4.37\ kW$$

L'area del secondo corpo nero è pari a:

$$\mathcal{A}_2 = 4\pi(2r)^2 = 4\mathcal{A}_1$$

Deve pertanto valere:

$$3P_1 = 3\mathcal{A}_1 \sigma T_1^4 = \mathcal{A}_2 \sigma T_2^4 = P_2$$

$$3\mathcal{A}_1 T_1^4 = \mathcal{A}_2 T_2^4$$

$$T_2 = \left(3\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2}\right)^{\frac{1}{4}} T_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} T_1 = 2606\ K$$

Esercizio 3

In un esperimento di effetto fotoelettrico un catodo in tungsteno (W = 5.4 eV) è sottoposto ad illuminazione. Nota la tensione di stopping V_{stop} = -3 V, determinare la lunghezza d'onda del fascio luminoso e la velocità dell'elettrone all'anodo in assenza di tensione applicata.

Soluzione 3

L'energia cinetica dell'elettrone fotoemesso all'anodo è descritta da:

$$E_k = E_{ph} - W + qV$$

Poiché per $V = V_{stop}$ non si osserva fotocorrente, l'energia cinetica dell'elettrone all'anodo è nulla. Pertanto:

$$E_{ph} - W + qV_{stop} = 0$$

Si può quindi ricavare l'energia del fotone entrante come:

$$E_{ph} = W - qV_{stop} = 5.4\ eV + 3\ eV = 8.4\ eV$$

Da cui la lunghezza d'onda del fascio luminoso:

$$\lambda = \frac{hc}{E_{ph}} = 147.9\ nm$$

In assenza di tensione applicata, l'energia cinetica dell'elettrone all'anodo sarà quindi data da:

$$E_k = E_{ph} - W = 3\ eV$$

Corrispondente ad una velocità dell'elettrone di:

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = 1.027 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$$

Esercizio 4

Si consideri la buca di potenziale a pareti infinite in **Fig. 1**. Sapendo che il rapporto tra il numero di elettroni che popolano il secondo livello e il numero di elettroni che popolano lo stato fondamentale a T = 500 K è pari a 10^{-3}, calcolare la larghezza a della buca facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 4

Come ragionevole approssimazione, si considera la statistica di Maxwell-Boltzmann per descrivere l'occupazione dei livelli energetici della buca:

$$f_{MB}(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}}$$

Noto il rapporto fra l'occupazione del secondo e del primo livello, si può quindi scrivere:

$$\frac{f_{MB}(E_2)}{f_{MB}(E_1)} = e^{-\frac{(E_2-E_F-E_1+E_F)}{kT}} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}} = 10^{-3}$$

Si può quindi ricavare la separazione fra i primi due livelli:

$$E_2 - E_1 = -kT\ln(10^{-3}) = 0.298\ eV$$

Ricordando che, per una buca a pareti infinite, l'energia dell'n-esimo livello è data da:

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$$

La separazione fra i primi due livelli si può esprimere come:

$$E_{21} = (4-1)\frac{h^2}{8ma^2} = \frac{3h^2}{8ma^2}$$

La larghezza della buca è quindi data da:

$$a = \sqrt{\frac{3h^2}{8mE_{21}}} = 1.95\ nm$$

Esercizio 5

Si consideri la relazione di dispersione $E(k) = E_0 + E_1\cos(4ka)$, con E_0 = 1 eV, E_1 = 0.5 eV, a = 0.5 nm. Si costruisca un pacchetto d'onda centrato in $k_0 = \frac{\pi}{4a}$ con peso g(k) gaussiano avente $\sigma_k = 10^8\ m^{-1}$. Valutare la velocità di gruppo, la dispersione del pacchetto e la velocità di fase a t = 0, t = 1 ps e t = 100 ps.

Soluzione 5

La velocità di fase è data da:

$$v_f = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \frac{E(k_0)}{\hbar k_0} = \frac{E_0 + E_1\cos(\pi)}{\hbar k_0} = \frac{E_0 - E_1}{\hbar k_0} = 0.483 \cdot 10^6\ m^{-1}$$

La velocità di gruppo è data da:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}\frac{dE}{dk}|_{k=k_0} = \frac{1}{\hbar}(-4E_1 a\sin(4ka))|_{k=k_0} = -\frac{4E_1 a}{\hbar}\sin(\pi) = 0$$

La dispersione del pacchetto nel tempo è descritta da:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 t^2}{\alpha}}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} = (7.07\ nm)^2$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}|_{k=k_0} = \frac{1}{2\hbar}\frac{d^2E}{dk^2}|_{k=k_0} = \frac{1}{2\hbar}(-16E_1a^2\cos(4ka))|_{k=k_0} = \frac{8E_1a^2}{\hbar} = 1.52 \cdot 10^{-3}\frac{m^2}{s^2}$$

Ai tempi richiesti la dispersione del pacchetto risulta pertanto:

$$\sigma_x(0) = \sqrt{\alpha} = 7.07\ nm$$

$$\sigma_x(1\ ps) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\cdot(1\ ps)^2} = 214\ nm$$

$$\sigma_x(100\ ps) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\cdot(100\ ps)^2} = 21.4\ \mu m$$

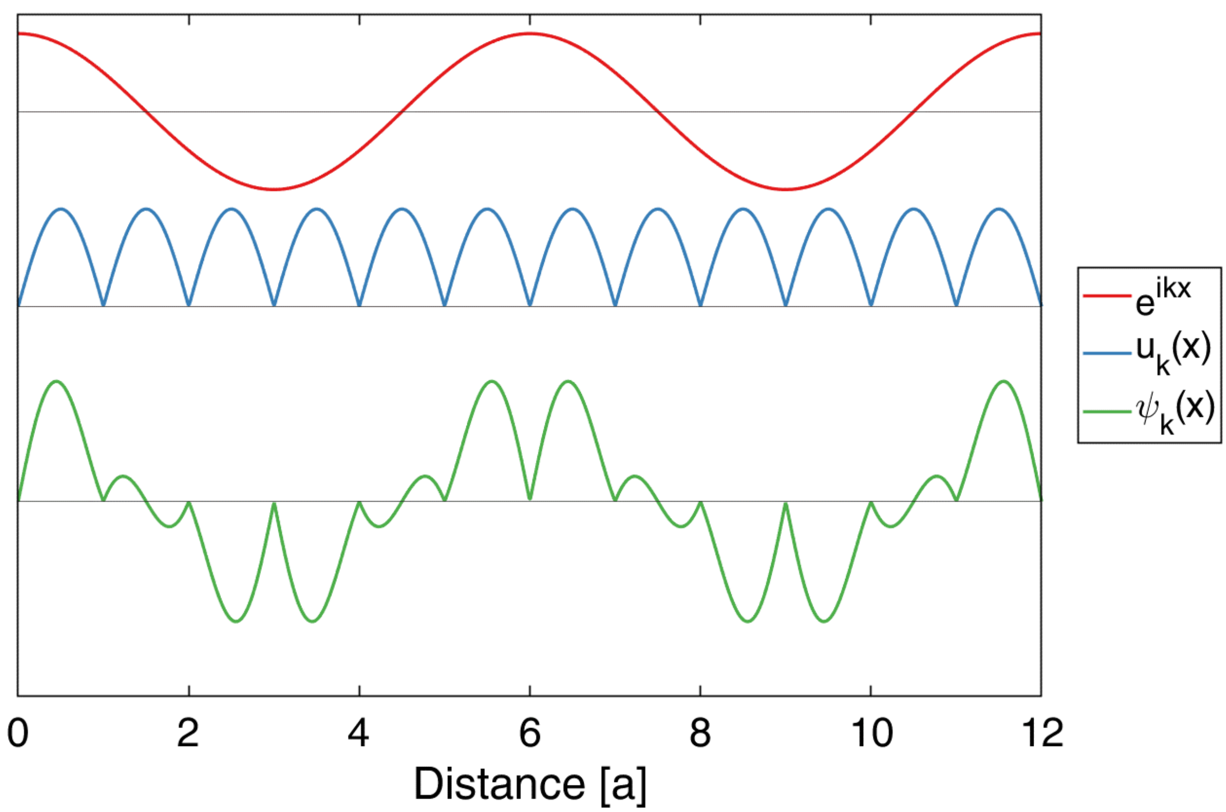
Esercizio 6

Un elettrone in un cristallo è descritto da un'autofunzione $\psi_k(x)$ con $k = 0.785 \cdot 10^9\ m^{-1}$. Sapendo che l'autofunzione $\psi_k(x)$ torna in fase dopo N = 6 passi reticolari, determinare il passo cristallino a e tracciare il profilo della parte reale della funzione inviluppo e il profilo della parte reale dell'autofunzione su 2N passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

Soluzione 6

La condizione di fase per l'elettrone nel cristallo è data da:

$$k \cdot Na = 2\pi \rightarrow a = \frac{2\pi}{Nk} = 1.334\ nm$$



Esercizio 7

Si consideri il diagramma a bande in **Fig. 2** ($m^*_v = 3m^*_c$), dove un elettrone di momento $k_0 = 10^9$ m^{-1} viene promosso dalla banda di valenza alla banda di conduzione grazie a un fotone di energia $E_{ph} = 1$ eV. Sapendo che l'elettrone promosso termalizza sul fondo della banda di conduzione rilasciando 10 fononi di energia media $E_{phn} = 20$ meV, determinare le masse efficaci m^*_c, m^*_v e l'energia di gap E_g.

Soluzione 7

Ricordando che, in approssimazione parabolica, le due bande possono essere descritte come:

$$E_c(k) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c^*} \qquad\qquad E_v(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

Il gap in funzione del momento si può scrivere come:

$$E_g(k) = E_c(k) - E_v(k) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2}\left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{1}{m_v^*}\right) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

In corrispondenza di k_0 deve quindi valere:

$$E_g(k_0) = E_g + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m^*} = E_{ph} = 1eV$$

Nota l'energia di termalizzazione, è possibile ricavare il contributo netto di energia in banda di conduzione:

$$E_c(k_0) - E_c(0) = E_g + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_c^*} - E_g = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_c^*} = N_{phn} \cdot E_{phn} = 0.2\ eV$$

Da cui si ricava la massa efficace in banda di conduzione:

$$m_c^* = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2 \cdot 0.2\ eV} = 0.19 m_e$$

Noto dal testo che $m_v^* = 3m_c^*$:

$$m_v^* = 0.573 m_e$$

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_c^*} + \frac{1}{m_v^*} = \frac{4}{3m_c^*} \rightarrow m^* = \frac{3}{4} m_c^* = 0.14 m_e$$

Il gap vale quindi:

$$E_g = 1\ eV - \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m^*} = 0.733\ eV$$

Esercizio 8

Si considerino due campioni metallici di pari area in oro (W_{Au} = 5.3 eV) e argento (W_{Ag} = 4.26 eV). Determinare a che temperatura deve essere portato il campione in oro affinché abbia la stessa densità di corrente termoionica dell'argento a T = 400 K, facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 8

Ricordando che la densità di corrente per emissione termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Affinché i due campioni portino la stessa corrente, devono avere la medesima densità di corrente (avendo pari area):

$$\frac{J_{Ag}}{J_{Au}} = \frac{A_{Ag} T_{Ag}^2 e^{-\frac{W_{Ag}}{kT_{Ag}}}}{A_{Au} T_{Au}^2 e^{-\frac{W_{Au}}{kT_{Au}}}} = \left(\frac{A_{Ag}}{A_{Au}}\right) \cdot \left(\frac{T_{Ag}}{T_{Au}}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_{Ag}}{T_{Ag}} - \frac{W_{Au}}{T_{Au}}\right)} = 1$$

Considerando $A_{Ag} \simeq A_{Au}$ e trascurando la dipendenza parabolica:

$$\frac{W_{Ag}}{T_{Ag}} = \frac{W_{Au}}{T_{Au}}$$

$$T_{Au} = \frac{W_{Au}}{W_{Ag}} T_{Ag} = 497.6\ K$$

Esercizio 9

Si consideri il setup sperimentale di effetto Hall in **Fig. 3** (B = 1 T, L = W = 1 μm, t = 100 nm, V_L = 1 V). Sapendo che la tensione V_H = 10 mV è positiva nel verso indicato, determinare tipologia e mobilità dei portatori. Nota la corrente I_1 = 1 μA a temperatura ambiente, calcolare la corrente I_2 attraverso la barretta alla temperatura T = 350 K.

Soluzione 9

Sul portatore agiscono simultaneamente la forza di Lorentz e la forza elettrostatica:

$$\mathcal{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\mathcal{F}_E = q\overrightarrow{F_t}$$

All'equilibrio, le due forze si equivalgono in modulo:

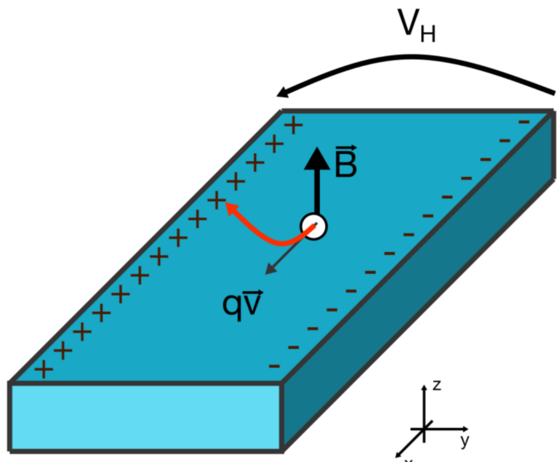
$$\mathcal{F}_L = \ qvB = \frac{qV_H}{W} = \mathcal{F}_E$$

$$\mu F_l B = \frac{V_H}{W}$$

$$\mu \frac{V_L}{L} B = \frac{V_H}{W}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L}\frac{L}{W}B = 100\frac{cm^2}{Vs}$$

Per identificare il tipo di portatore, notiamo che il campo magnetico è diretto come z_+. Poiché la corrente fluisce in direzione x_+, il prodotto $q\vec{v}$ sarà orientato nella stessa direzione (per gli elettroni $q < 0, \vec{v} \propto x_- \rightarrow q\vec{v} \propto x_+$, per le lacune $q > 0, \vec{v} \propto x_+ \rightarrow q\vec{v} \propto x_+$). Pertanto, il portatore viene deflesso in direzione y_-, dove il segno della tensione di Hall rivela un accumulo di carica positiva. Il portatore è pertanto una lacuna, e la barretta è drogata p:



La corrente attraverso la barretta è data da:

$$I = \frac{V_L}{R} = \frac{V_L}{\rho \cdot \frac{L}{Wt}} = \frac{V_L \cdot Wt}{\rho \cdot L} \simeq \frac{V_L}{L} \cdot Wt \cdot q\mu_p N_A$$

La variazione di corrente al variare della temperatura è legata alla sola variazione della mobilità, poiché nel range di temperature considerato (300-350K) è ragionevole assumere che il materiale rimanga in regime estrinseco, e dunque la concentrazione di portatori non cambi in temperatura e sia circa pari a N_A (ipotesi di completa ionizzazione):

$$I(T) \propto \mu(T)$$

Non conoscendo il materiale di cui è composta la barretta, è possibile fare una di tre ragionevoli ipotesi. Se si assume che nel range di temperature 300-350K la mobilità sia limitata dallo scattering fononico, allora:

$$I(T) \propto \mu(T) \propto T^{-\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{V_L}{L} Wt \cdot q\mu N_A \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-\frac{3}{2}} = I \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-\frac{3}{2}} = 0.79\ \mu A$$

L'ipotesi è ragionevole, ad esempio, per materiali quali il Silicio a drogaggi moderati, che presentano temperature di transizione dal regime di scattering da impurezze ionizzate al regime di scattering fononico nell'ordine di T = 90-120K.

Viceversa, se si assume che nel range di temperature 300-350K la mobilità sia ancora limitata dallo scattering da impurezze ionizzate, allora:

$$I(T) \propto \mu(T) \propto T^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{V_L}{L} Wt \cdot q\mu N_A \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = I \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.26 \cdot I = 1.26\ \mu A$$

L'ultima ipotesi possibile è che il materiale stia lavorando esattamente nel range della temperatura di transizione tra i due regimi, corrispondente al "plateau" della curva della mobilità. L'ipotesi è ragionevole per materiali come il fosfuro di Indio a bassi drogaggi, o il nitrurio di gallio (GaN) a drogaggi moderati. IN questo caso, le due dipendenze tendono ad annullarsi e la mobilità rimane pressoché costante:

$$I(T) \propto \mu(T) \simeq \mu \quad \rightarrow \quad I_2 \simeq I = 1\ \mu A$$

Esercizio 10

Un semiconduttore di tipo n è irraggiato da una sorgente luminosa che induce una fotogenerazione uniforme nel volume del materiale. Sapendo che la concentrazione di lacune aumenta di un fattore 10^4, determinare di quanto si sposta a temperatura ambiente il livello di quasi Fermi delle lacune F_p rispetto al livello di Fermi all'equilibrio E_F.

Soluzione 10

La concentrazione di lacune in condizioni di equilibrio è data da:

$$p_0 = n_i e^{\frac{E_i - E_F}{kT}}$$

In condizioni di fuori equilibrio, la concentrazione di lacune è esprimibile come:

$$p' = n_i e^{\frac{E_i - F_p}{kT}}$$

Noto il rapporto tra le due concentrazioni, è quindi possibile ricavare lo spostamento del quasi livello di Fermi rispetto all'equilibrio:

$$\frac{p'}{p_0} = e^{\frac{E_F - F_p}{kT}} = 10^4$$

$$F_p - E_F = -kT \ln(10^4) = -0.238\ eV$$

$$F_p = E_F - 0.238\ eV$$