

# 21/06/2024 – Seconda Prova in Itinere

## Esercizio 1

Un cristallo monodimensionale è descritto dalla relazione di dispersione  $E(k) = E_0 - E_1 \cos(4ka)$ , dove  $E_0 = 0.1$  eV,  $E_1 = 0.2$  eV. Sapendo che la prima zona di Brillouin si estende fino a  $k = 2 \cdot 10^9$  m<sup>-1</sup>, determinare il passo reticolare  $a$ , i valori di  $k$  per cui la velocità di gruppo è nulla, e gli intervalli di  $k$  per cui la massa efficace è positiva.

## Soluzione 1

La prima zona di Brillouin è definita, rispetto al passo reticolare  $a$ :

$$-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$$

Noto il valore del confine positivo, si ha quindi:

$$a = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}} = 1.57 \text{ nm}$$

Ricordando la definizione di velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = 4E_1 a \sin(4ka)$$

La velocità di gruppo si annulla in corrispondenza di:

$$4ka = \pm m\pi \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

Limitandosi alla prima zona di Brillouin, deve quindi valere:

$$k = \pm \frac{m\pi}{4a} \quad m = 0, 1, 2, 3$$

Corrispondenti quindi a:

$$k \in \pm \{0, 0.5 \cdot 10^9, 10^9, 1.5 \cdot 10^9\} \text{ m}^{-1}$$

Ricordando la definizione di massa efficace:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$$

Affinché la massa efficace sia positiva deve valere:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = 16E_1 a^2 \cos(4ka) > 0$$

Da cui:

$$\cos(4ka) > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi < 4ka < \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi \quad n \geq 0$$

$$-\frac{\pi(1 \pm 4n)}{8a} < k < \frac{\pi(1 \pm 4n)}{8a}$$

Imponendo che le soluzioni cadano entro la prima zona di Brillouin si può calcolare il massimo valore per n:

$$-\frac{\pi(1 + 4n)}{8a} \leq \frac{\pi}{a} \rightarrow n \leq 2$$

Dunque i valori possibili sono n = 0, 1, 2, a cui corrispondono gli intervalli:

$$-\frac{\pi}{a} < k < -\frac{7\pi}{8a} \vee -\frac{5\pi}{8a} < k < -\frac{3\pi}{8a} \vee -\frac{\pi}{8a} < k < \frac{\pi}{8a} \vee \frac{3\pi}{8a} < k < \frac{5\pi}{8a} \vee \frac{7\pi}{8a} < k < \frac{\pi}{a}$$

Si noti in particolare che, per n = 2, l'estremo superiore dell'ultimo intervallo (ed inferiore del primo intervallo) cade oltre la prima zona di Brillouin; sono stati pertanto ristretti agli estremi  $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$  della FBZ.

## Esercizio 2

Si consideri il processo a due particelle mostrato in **Fig. 1**, dove un elettrone viene promosso dalla banda di valenza alla banda di conduzione mediante assorbimento di un fotone di lunghezza d'onda  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  in corrispondenza di  $k^* = 10^9 \text{ m}^{-1}$ . Note  $E_g = 1 \text{ eV}$ ,  $m_v^* = 0.5m_e$ ,  $m_c^* = 0.1m_e$ , determinare la posizione  $k_{0,BC}$  del fondo della banda di conduzione e l'energia cinetica dell'elettrone a seguito della promozione in BC.

## Soluzione 2

In approssimazione parabolica, è possibile descrivere le due bande come:

$$E_V(k) = -Ak^2 = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$
$$E_C(k) = E_g + B(k - k_0)^2 = E_g + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m_c^*}$$

Poiché il processo non coinvolge fononi, il momento dell'elettrone si conserva: occorre pertanto descrivere il gap a parità di  $k$ ,

$$E_g(k) = E_g + B(k - k_0)^2 + Ak^2$$

In corrispondenza della transizione il gap effettivo deve essere pari all'energia del fotone assorbito:

$$E_g(k^*) = \frac{hc}{\lambda} = E_{ph}$$

Da cui è possibile ricavare  $k_0$  come:

$$k^* - k_0 = \pm \sqrt{\frac{E_{ph} - E_g - Ak^{*2}}{B}}$$

I possibili valori di  $k_0$  sono pertanto dati da:

$$k_0 = k^* + \sqrt{\frac{E_{ph} - E_g - Ak^{*2}}{B}} = 1.66 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$
$$k_0 = k^* - \sqrt{\frac{E_{ph} - E_g - Ak^{*2}}{B}} = 0.34 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

In entrambi i casi, l'energia cinetica dell'elettrone in banda di conduzione è pari a:

$$E_K = E_C(k^*) - E_C(k_0) = B(k^* - k_0)^2 = 166 \text{ meV}$$

### Esercizio 3

Un cristallo monodimensionale caratterizzato da una relazione di dispersione  $E(k) = E_0(1 - \cos(3ka))$ , con  $E_0 = 0.25$  eV,  $a = 1$  nm, è sottoposto ad un campo elettrico  $F = 20$  kV/cm. Determinare ampiezza e periodo delle oscillazioni di Bloch in assenza di fenomeni di scattering.

### Soluzione 3

La legge oraria del moto per un elettrone in un cristallo è data da:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{qF}{\hbar}$$

Da cui si ha:

$$k(t) = k(0) + \frac{qF}{\hbar}t$$

Ricordando che:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_g(t) dt$$

Dove la velocità di gruppo si può esprimere come:

$$v_g(t) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{3E_0 a}{\hbar} \sin(3k(t)a)$$

È possibile ricostruire la traiettoria del pacchetto come:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \int_0^t \frac{3E_0 a}{\hbar} \sin\left(\left(k(0) + \frac{qF}{\hbar}t\right) \cdot 3a\right) dt \\ &= x(0) - \frac{3E_0 a}{\hbar} \cdot \frac{\hbar}{qF} \cdot \frac{1}{3a} \left[ \cos\left(\left(k(0) + \frac{qF}{\hbar}t\right) \cdot 3a\right) \right]_0^t \\ &= x(0) + \frac{E_0}{qF} \cos(k(0) \cdot 3a) - \frac{E_0}{qF} \cos\left(\left(k(0) + \frac{qF}{\hbar}t\right) \cdot 3a\right) \\ &= x'(0) - A_B \cos(\omega_B t + \phi_B) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\omega_B = \frac{qF}{\hbar} \cdot 3a = 9.1 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$$

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = 690.46 \text{ fs}$$

$$A_B = \frac{E_0}{qF} = 125 \text{ nm}$$

## Esercizio 4

Si considerino due campioni metallici con funzioni lavoro  $W_1 = 5 \text{ eV}$ ,  $W_2 = 4.3 \text{ eV}$ . Determinare a che temperatura  $T_2$  deve essere portato il secondo materiale per garantire la stessa densità di corrente termoionica del primo campione alla temperatura  $T_1 = 425 \text{ K}$ .

## Soluzione 4

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Imponendo  $J_1 = J_2$  e assumendo  $A_1 \approx A_2$ :

$$\frac{J_1}{J_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)}$$
$$0 = 2 \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)$$

Trascurando la dipendenza quadratica dalla temperatura si ha:

$$0 \approx -\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)$$

Da cui quindi:

$$T_2 = \frac{W_2}{W_1} T_1 = 365.5 \text{ K}$$

## Esercizio 5

In un metallo bidimensionale a temperatura ambiente il livello di Fermi è localizzato ad  $E_F = 3$  eV rispetto al fondo della banda di conduzione. Calcolare, facendo ragionevoli approssimazioni, la concentrazione elettronica in banda di conduzione, la temperatura di Fermi  $T_F$  e velocità di Fermi  $v_F$  del materiale. Se il metallo venisse scaldato ad una temperatura  $300\text{ K} < T_2 \ll T_F$ , come cambierebbe la concentrazione elettronica? E se venisse portato a  $T_3 \gg T_F$ ?

## Soluzione 5

La concentrazione elettronica è data da:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g(E) f(E) dE$$

Dove:

$$g(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$$

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Approssimando  $m^* \simeq m_e$ , e considerando la statistica di Fermi-Dirac a 0K, si ha:

$$n \simeq \int_{E_C}^{E_F} \frac{m_e}{\pi \hbar^2} dE = \frac{m_e}{\pi \hbar^2} (E_F - E_C) = 1.25 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$$

La temperatura di Fermi è data da:

$$kT_F = E_F \rightarrow T_F = \frac{E_F}{k} \simeq 35 \cdot 10^3 \text{ K}$$

La velocità di Fermi è data da:

$$\frac{1}{2} m_e v_F^2 = 2 \cdot \frac{kT_F}{2} \rightarrow v_F = \sqrt{\frac{2kT_F}{m_e}} = 1.027 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se il materiale venisse scaldato ad una temperatura elevata ma molto inferiore alla temperatura di Fermi, la concentrazione elettronica resterebbe invariata: sarebbe invece il livello di Fermi a spostarsi per mantenerla costante. Viceversa, se il materiale venisse portato ad una temperatura superiore a quella di Fermi, si avrebbe promozione di elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione per generazione termica, con conseguente aumento della concentrazione elettronica in banda. Tuttavia, è ragionevole presumere che il materiale andrebbe incontro a fusione prima di raggiungere tale temperatura.

## Esercizio 6

Determinare la massa DOS e di conduzione per lacune ed elettroni per il nitruro di boro (BN), sapendo che i minimi della BC sono centrati nei punti X, e note  $m_{l,BC}^* = 1.2m_e$ ,  $m_{t,BC}^* = 0.26m_e$ ,  $m_{hh}^* = 0.962m_e$ ,  $m_{lh}^* = 0.108m_e$ .

## Soluzione 6

Poiché i minimi della BC sono centrati nel punto X, solo metà degli ellissoidi rientra nella prima zona di Brillouin. La degenerazione del materiale è pertanto data da:

$$g = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

La massa DOS in banda di conduzione è quindi data da:

$$m_{DOS,n} = g^{\frac{2}{3}} m_l^{\frac{1}{3}} m_t^{\frac{2}{3}} = 0.9m_e$$

Per la massa DOS in banda di valenza occorre invece considerare entrambe le bande di lacune pesanti e leggere:

$$m_{DOS,p} = \left( m_{hh}^{\frac{3}{2}} + m_{lh}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.986m_e$$

Per la massa di conduzione in BC, ciascun minimo contribuisce con la stessa densità di stati. Per una generica direzione di campo, si osservano sempre 4 minimi contribuire con la massa trasversale, e 2 minimi contribuire con massa longitudinale. Pertanto:

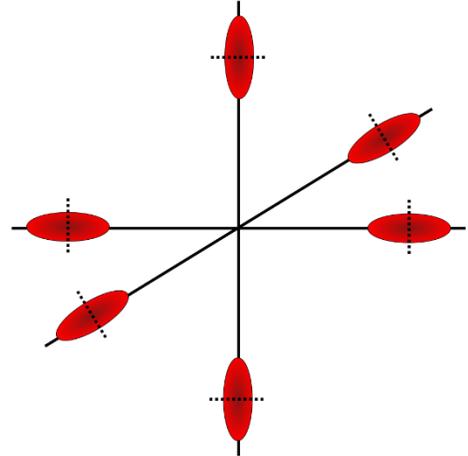
$$\frac{6}{m_c^*} = \frac{2}{m_l^*} + \frac{4}{m_t^*}$$

$$m_{c,n}^* = \frac{3m_l^* m_t^*}{m_t^* + 2m_l^*} = 0.352m_e$$

Infine, per la massa di conduzione in BV, occorre pesare ciascun minimo per il proprio contributo rispetto alla totalità degli stati, rappresentata dalla massa DOS:

$$\frac{1}{m_{c,p}^*} = \frac{m_{hh}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}} m_{hh}^*} + \frac{m_{lh}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}} m_{lh}^*}$$

$$m_{c,p}^* = \frac{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}}}{m_{hh}^{\frac{1}{2}} + m_{lh}^{\frac{1}{2}}} = \frac{m_{hh}^{\frac{3}{2}} + m_{lh}^{\frac{3}{2}}}{m_{hh}^{\frac{1}{2}} + m_{lh}^{\frac{1}{2}}} = 0.748m_e$$



## Esercizio 7

Si consideri un campione di silicio drogato n. Sapendo che a  $T = 30\text{ K}$  la frazione ionizzata del drogante è pari a  $N_D^+ = 10^{13}\text{ cm}^{-3}$ , e che a  $T = 500\text{ K}$  il materiale transisce dal regime estrinseco al regime intrinseco, determinare l'energia di legame  $E_D - E_C$  delle impurezze donori.

## Soluzione 7

Quando il materiale transisce dal regime estrinseco al regime intrinseco, la concentrazione intrinseca eguaglia la concentrazione di drogante, assunto totalmente ionizzato:

$$n_i(500\text{ K}) = N_D$$

La concentrazione intrinseca a 500 K è ricavabile come:

$$n_i(500\text{ K}) = n_i(300\text{ K}) \cdot \left(\frac{500}{300}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{500\text{ K}} - \frac{1}{300\text{ K}}\right)} = 1.78 \cdot 10^{14}\text{ cm}^{-3} = N_D$$

Nota la concentrazione totale di drogante, è possibile ricavare il valore della statistica di ionizzazione a 30 K:

$$N_D^+(30\text{ K}) = f_I(30\text{ K}) \cdot N_D$$
$$f_I(30\text{ K}) = \frac{N_D^+(30\text{ K})}{N_D} = 0.056$$

Ricordando che per le specie donori la statistica di ionizzazione è data da:

$$f_I(T) = \frac{1}{1 + 2e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}}$$

È possibile ricavare lo scostamento fra il livello donore e il livello di Fermi a 30 K come:

$$e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_I(T)} - 1 \right)$$
$$E_F - E_D = kT \log \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_I(T)} - 1 \right) \right) = 5.5\text{ meV}$$

La posizione del livello di Fermi rispetto alla banda di conduzione è ricavabile approssimando la concentrazione di portatori in banda alla sola componente di drogante ionizzato:

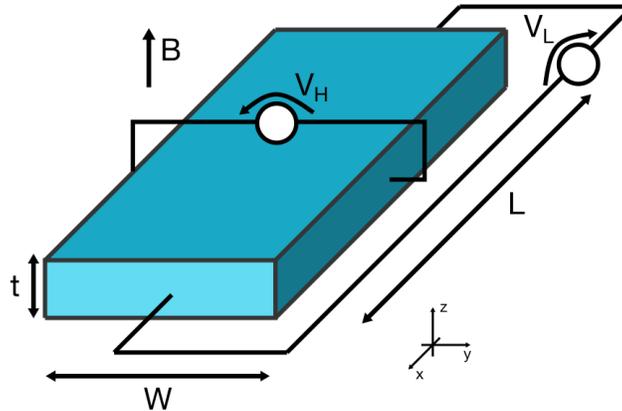
$$n \simeq N_D^+ = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$
$$E_F - E_C = kT \log \left( \frac{N_D^+}{N_C} \right) = -29.8\text{ meV}$$

Da cui si arriva finalmente all'energia di legame per gli stati donori:

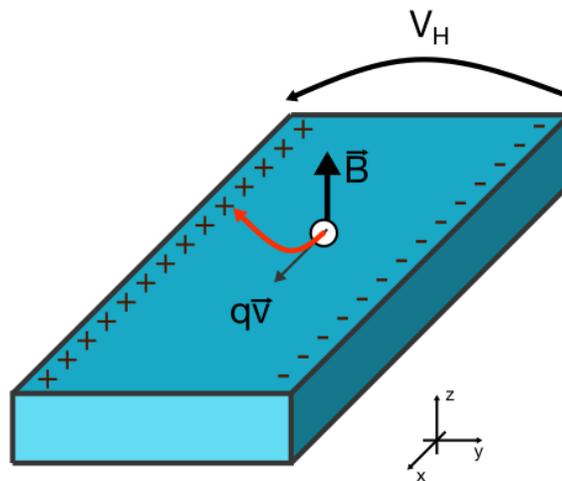
$$E_D - E_C = E_D - E_F + E_F - E_C = -(E_F - E_D) + (E_F - E_C) = -35.4\text{ meV}$$

## Esercizio 8

Si consideri la barretta di silicio drogato sottoposta ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 2**, dove  $W = 1 \mu\text{m}$ ,  $L = 100 \mu\text{m}$ ,  $t = 100 \text{ nm}$ ,  $V_L = 1 \text{ V}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $V_H = 10 \text{ mV}$  positiva nel verso indicato in figura. Nota la corrente a temperatura ambiente  $I = 100 \mu\text{A}$ , determinare tipologia, mobilità e concentrazione dei portatori. Stimare quindi la corrente alle temperature  $T = 50 \text{ K}$  e  $T = 400 \text{ K}$ , assumendo che il semiconduttore permanga nel regime estrinseco di funzionamento.



## Soluzione 8



La corrente scorre in direzione  $x^+$ . Il prodotto  $q\vec{v}$  è pertanto orientato in direzione  $x^+$  sia per le lacune ( $q > 0, v \propto x^+$ ) che per gli elettroni ( $q < 0, v \propto x^-, q\vec{v} \propto x^+$ ). Il campo magnetico  $B$  è orientato come  $z^+$ , pertanto la forza di Lorentz tende a spostare i portatori verso  $y$ . Il segno della tensione di Hall rivela un accumulo di carica positiva in tale direzione, pertanto i portatori maggioritari sono lacune, ovvero il materiale è drogato p.

La mobilità si può ricavare dal bilancio tra la forza di Lorentz e quella di Coulomb:

$$|\mathcal{F}_L| = qvB = q\mu F_L B = q\mu \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W} = qF_T = |\mathcal{F}_C|$$

Da cui:

$$\mu_p = \frac{L V_H}{W V_L B} = 10000 \frac{cm^2}{Vs}$$

La concentrazione si può ricavare a partire dalla corrente ricordando:

$$I = GV_L = \sigma \frac{Wt}{L} V_L = (q\mu_p N_A) \frac{Wt}{L} V_L$$

$$N_A = \frac{I L}{V_L W t q\mu_p} = 6.25 \cdot 10^{17} cm^{-3}$$

A basse temperature (T = 50 K) il contributo dominante allo scattering nel silicio drogato è dato dalle impurezze ionizzate. Assumendo che il semiconduttore continui a lavorare in regime estrinseco, la concentrazione di portatori rimane circa pari a quella del drogante, pertanto è la variazione di mobilità a determinare la variazione di corrente:

$$\mu(T_1) \simeq \mu_{ii}(T_1) \propto T^{\frac{3}{2}}$$

$$I(50 K) \simeq I(300 K) \cdot \left(\frac{50}{300}\right)^{\frac{3}{2}} = 6.8 \mu A$$

Ad alte temperature (T = 400 K) il contributo dominante è invece dato dallo scattering fononico:

$$\mu(T_2) \simeq \mu_{ph}(T_2) \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

$$I(400 K) = I(300 K) \cdot \left(\frac{400}{300}\right)^{-\frac{3}{2}} = 64.95 \mu A$$

## Esercizio 9

Applicando ad una barretta di silicio di lunghezza  $L = 1 \mu\text{m}$  e sezione  $A = 1 \mu\text{m}^2$  le tensioni  $V_1 = 0.1 \text{ V}$  e  $V_2 = 10 \text{ V}$  si misurano rispettivamente una corrente  $I_1 = 0.25 \mu\text{A}$  e  $I_2 = 5 \mu\text{A}$ . Nota la concentrazione elettronica in banda di conduzione  $n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , determinare il campo di saturazione  $F_{\text{sat}}$  e la velocità di saturazione  $v_{\text{sat}}$ .

## Soluzione 9

Supponiamo che il semiconduttore continui ad operare in regime lineare nei due casi. Allora dovrebbe valere:

$$I_1 = A \cdot J_1 = qAnv_1 = qAn\mu F_1 = qAn\mu \frac{V_1}{L}$$

$$I_2 = qAnv_2 = qAn\mu F_2 = qAn\mu \frac{V_2}{L}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 20 \neq 100 = \frac{V_2}{V_1}$$

Poiché il rapporto fra le correnti è diverso dal rapporto delle tensioni, l'ipotesi iniziale è falsa, pertanto il semiconduttore non opera in regime lineare in entrambi i casi.

Viceversa, potrebbe trovarsi in entrambi i casi in regime di velocità saturata. Allora:

$$I_1 = qAnv_{\text{sat}} = I_2$$

Tuttavia, poiché  $I_1 \neq I_2$ , anche tale ipotesi è falsa.

L'unica possibilità pertanto è che il semiconduttore operi in due regimi differenti: velocità lineare per  $V_1$ , velocità saturata per  $V_2$ . Pertanto:

$$I_1 = qAnv_1 = qAn\mu \frac{V_1}{L}$$

$$I_2 = qAnv_{\text{sat}} = qAn\mu F_{\text{sat}}$$

È quindi possibile ricavare il campo di saturazione come:

$$F_{\text{sat}} = \frac{I_2}{qAn\mu} = \frac{I_2}{I_1} \frac{L}{V_1} = \frac{V_1 I_2}{L I_1} = 20 \text{ kV/cm}$$

La velocità di saturazione si può invece ricavare come:

$$v_{\text{sat}} = \frac{I_2}{qAn} = 3.125 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## Esercizio 10

Una barretta di silicio drogata n ( $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ) a temperatura ambiente contiene un eccesso di portatori minoritari  $p' = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Noto il tempo di ricombinazione dei minoritari  $\tau_p = 20 \text{ ns}$ , calcolare il tempo necessario affinché il quasi-livello di Fermi per le lacune aumenti di 50 meV, e la posizione del quasi-livello di Fermi per le lacune al tempo  $t = 750 \text{ ns}$ .

## Soluzione 10

In un semiconduttore fuori equilibrio, in assenza di fenomeni di generazione continui, i portatori in eccesso tendono a ricombinare secondo:

$$\delta p(t) \simeq \delta p(0) e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

Approssimando la concentrazione totale di lacune nel materiale alla sola componente in eccesso, si può scrivere:

$$\delta p(t) \simeq p(t) = N_V e^{-\frac{F_p(t) - E_V}{kT}}$$

Considerando pertanto  $F_p(\tilde{t}) = F_p(0) + 50 \text{ meV}$ , si può scrivere:

$$\delta p(\tilde{t}) = \delta p(0) e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_p}} = N_V e^{-\frac{F_p(0) - E_V}{kT}} e^{-\frac{50 \text{ meV}}{kT}} = \delta p(0) e^{-\frac{50 \text{ meV}}{kT}}$$

Pertanto:

$$\tilde{t} = \tau_p \cdot \frac{50 \text{ meV}}{kT} = 38.63 \text{ ns}$$

Al tempo  $t = 750 \text{ ns}$ , la concentrazione di portatori in eccesso è ridotta a:

$$\delta p(t) = \delta p(0) e^{-\frac{750 \text{ ns}}{\tau_p}} = 0.5 \text{ cm}^{-3} \ll 939 \text{ cm}^{-3} = \frac{n_i^2}{N_D} = p_0$$

Il materiale è pertanto tornato in condizioni di equilibrio: il livello di quasi-Fermi torna a coincidere con il livello di Fermi del sistema, che è ricavabile a partire dalla concentrazione di drogante,

$$N_D \simeq n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

$$E_C - E_F = -kT \log\left(\frac{N_D}{N_C}\right) = 125 \text{ meV}$$

Posto il riferimento energetico in corrispondenza dell'apice della banda di valenza, si ha quindi:

$$F_p(750 \text{ ns}) = E_F = 1.12 \text{ eV} - 125 \text{ meV} = 0.97 \text{ eV}$$