

# 21/06/2024 - Appello

## Esercizio 1

Un cristallo cubico semplice di passo reticolare  $a = 0.1 \text{ nm}$  è illuminato con una sorgente a raggi X di energia  $E = 5 \text{ keV}$ . Determinare tutti gli angoli di diffrazione associati alla famiglia di piani  $\{211\}$ .

## Soluzione 1

La distanza interplanare per la famiglia  $\{211\}$  è data da:

$$d_{211} = \frac{a}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0.04 \text{ nm}$$

Gli angoli per cui si ha diffrazione sono quelli che verificano la condizione di Bragg:

$$n\lambda = 2d_{211} \sin(\theta)$$

$$\theta = \text{asin}\left(\frac{n\lambda}{2d_{211}}\right)$$

Dove la lunghezza d'onda della sorgente è data da:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 0.248 \text{ nm}$$

In particolare, si avranno in totale:

$$\frac{n\lambda}{2d_{211}} \leq 1 \rightarrow n \leq \frac{2d_{211}}{\lambda} = 0.3286$$

Non sono quindi presenti picchi di diffrazione. Per ulteriore conferma, possiamo calcolare la minima distanza interplanare risolubile:

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2} = 0.124 \text{ nm} > d_{211}$$

Che risulta infatti maggiore della distanza interplanare per la famiglia  $\{211\}$ .

## Esercizio 2

Una sfera di tungsteno di raggio  $r_1 = 1$  cm emette metà della potenza di un corpo nero  $BB_1$  di pari area. Sapendo che il corpo nero  $BB_1$  si trova alla stessa temperatura di un corpo nero  $BB_2$  di raggio  $r_2 = 2$  cm che emetta una potenza di 2 kW, determinare la potenza emessa dalla sfera di tungsteno.

## Soluzione 2

La potenza emessa dal corpo nero  $BB_1$  è esprimibile a mezzo della legge di Stefan-Boltzmann:

$$P_1 = \sigma A_1 T_1^4$$

Analogamente la potenza emessa dal corpo nero  $BB_2$ :

$$P_2 = \sigma A_2 T_2^4$$

Infine, per la sfera di tungsteno vale:

$$P_S = \frac{1}{2} P_1$$

Nota l'area del secondo corpo nero e la potenza emessa, è possibile ricavare la temperatura:

$$T_2 = \left( \frac{P_2}{\sigma A_2} \right)^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{P_2}{4\sigma\pi r_2^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 1628 \text{ K}$$

Dal testo è noto che tale temperatura è la stessa a cui si trova il corpo nero  $BB_1$ , la cui potenza emessa è pertanto:

$$P_1 = \sigma A_1 T_1^4 = \sigma A_1 T_2^4 = 0.5 \text{ kW}$$

La potenza emessa dalla sfera di tungsteno è quindi pari a:

$$P_S = \frac{1}{2} P_1 = 0.25 \text{ kW}$$

### Esercizio 3

Si consideri un profilo di potenziale del tipo  $V(x) = \alpha x^\beta$ , con  $\alpha = 0.1 \text{ eV/nm}^{3/2}$ ,  $\beta = 3/2$ . Dopo aver stimato a mezzo del principio di indeterminazione di Heisenberg l'esponente  $\gamma$  della progressione degli autovalori  $n^\gamma$ , determinare la lunghezza d'onda del fotone associato al rilassamento dal quarto al secondo autostato.

### Soluzione 3

L'indeterminazione sulla posizione è approssimabile come:

$$x_{min} = -\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad x_{max} = +\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad \Delta x = 2\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

L'indeterminazione sul momento è approssimabile come:

$$p_{min} = -\sqrt{2mE} \quad p_{max} = +\sqrt{2mE} \quad \Delta p = 2\sqrt{2mE}$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \approx n\hbar$$

$$\frac{4\sqrt{2m}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \cdot E^{\frac{\beta+2}{2\beta}} = n\hbar$$

$$E = n^{\frac{2\beta}{\beta+2}} \cdot \left(\frac{\hbar\alpha^{\frac{1}{\beta}}}{4\sqrt{2m}}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+2}}$$

Gli autovalori pertanto progrediscono con esponente:

$$\gamma = \frac{2\beta}{\beta+2} = \frac{6}{7}$$

Per determinare la lunghezza d'onda del fotone del rilassamento  $E_4 \rightarrow E_2$ , occorre determinare le energie dei due autostati:

$$E_2 = 2^{\frac{6}{7}} \cdot (20.2 \text{ meV}) = 36.5 \text{ meV}$$

$$E_4 = 4^{\frac{6}{7}} \cdot (20.2 \text{ meV}) = 66.2 \text{ meV}$$

Da cui:

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{29.7 \text{ meV}} = 41.9 \mu\text{m}$$

## Esercizio 4

Una particella è caratterizzata da una relazione di dispersione  $\omega(k) = 2\omega_0 \sin(2ka)$ , con  $a = 0.3 \text{ nm}$  e  $\omega_0 = 5 \text{ Trad/s}$ . Considerando un pacchetto d'onda centrato in  $k_0 = 10^9 \text{ m}^{-1}$ , con peso gaussiano  $g(k)$  avente  $\sigma_k = k_0/5$ , tracciare un grafico quotato della dispersione spaziale  $\sigma_x(t)$ .

## Soluzione 4

La dispersione spaziale del pacchetto è descritta da:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} t^2}$$

Dove:

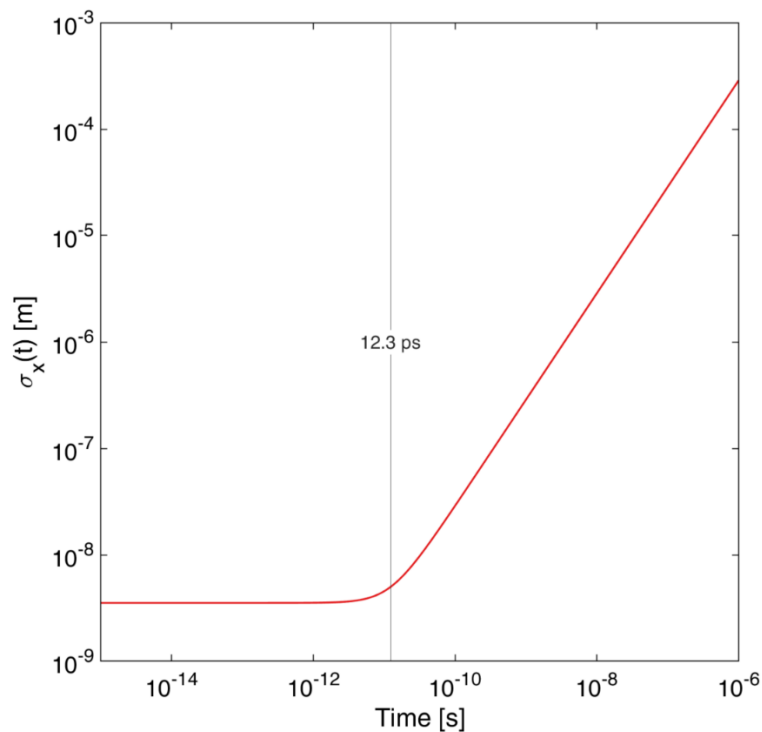
$$\alpha = \frac{1}{2\sigma_k^2} = (3.53 \text{ nm})^2$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} = -4\omega_0 a^2 \sin(2k_0 a) = -1.016 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Per tracciare il grafico quotato, occorre determinare il punto di cutoff:

$$\tilde{t} := \alpha = \frac{\beta^2}{\alpha} \tilde{t}^2$$

$$\tilde{t} = \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = 12.3 \text{ ps}$$



## Esercizio 5

Un elettrone in un cristallo monodimensionale è descritto da un'autofunzione  $\psi_k(x)$  con  $k = 10^9 \text{ m}^{-1}$ . Sapendo che l'autofunzione  $\psi_k(x)$  ha lunghezza d'onda pari a 10 passi reticolari, calcolare il passo reticolare  $a$ . Tracciare quindi il profilo della parte reale della funzione involuppo e dell'autofunzione su 5 passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch  $u_k(x)$  ha un solo massimo in corrispondenza di ogni atomo, e si annulla nella regione di barriera.

## Soluzione 5

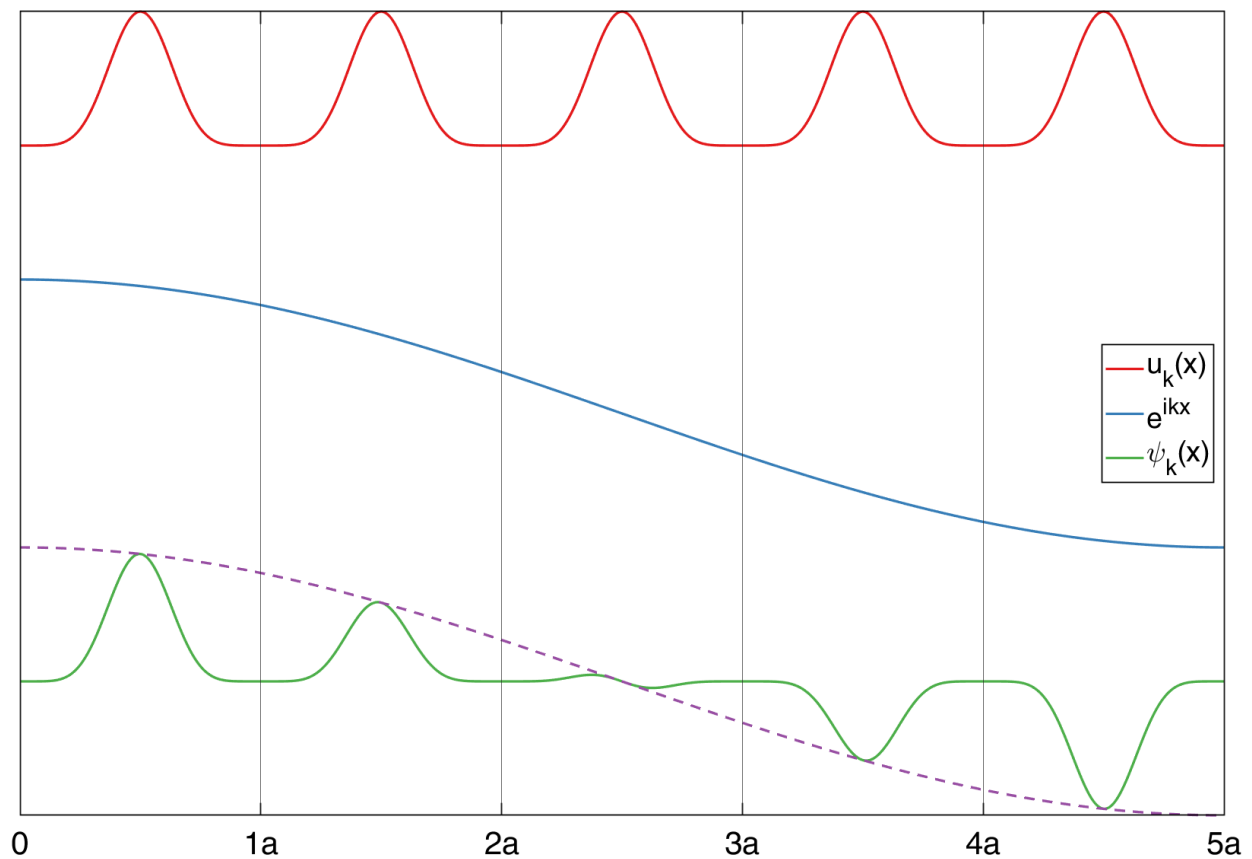
Ricordando che, per il teorema di Bloch, l'autofunzione in un cristallo può essere scritta come:

$$\psi_k(x) = u_k e^{ikx}$$

Nota la lunghezza d'onda dell'autofunzione è possibile ricavare il passo reticolare come:

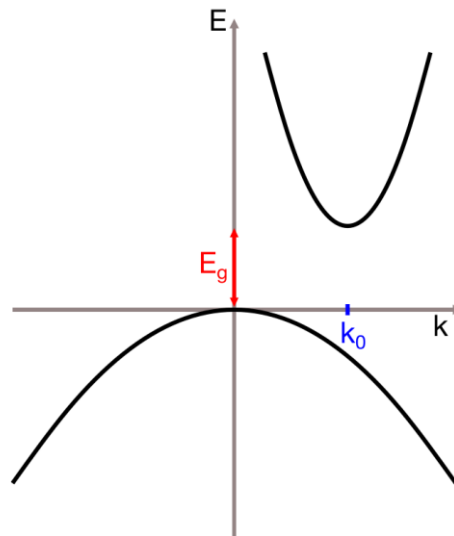
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 10a$$

$$a = \frac{\pi}{5k} = 0.628 \text{ nm}$$



## Esercizio 6

Si consideri il diagramma a bande in **Fig. 1**, dove un elettrone viene promosso dalla banda di valenza alla banda di conduzione mediante assorbimento di un fotone di lunghezza d'onda  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  in corrispondenza di  $k^* = 10^9 \text{ m}^{-1}$ . Note  $E_g = 1 \text{ eV}$ ,  $m_v^* = 0.5m_e$ ,  $m_c^* = 0.1m_e$ , determinare la posizione  $k_0$  del fondo della banda di conduzione e l'energia cinetica dell'elettrone a seguito della promozione in BC.



## Soluzione 6

In approssimazione parabolica, è possibile descrivere le due bande come:

$$E_V(k) = -Ak^2 = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

$$E_C(k) = E_g + B(k - k_0)^2 = E_g + \frac{\hbar^2 (k - k_0)^2}{2m_c^*}$$

Poiché il processo non coinvolge fononi, il momento dell'elettrone si conserva: occorre pertanto descrivere il gap a parità di  $k$ ,

$$E_g(k) = E_g + B(k - k_0)^2 + Ak^2$$

In corrispondenza della transizione il gap effettivo deve essere pari all'energia del fotone assorbito:

$$E_g(k^*) = \frac{hc}{\lambda} = E_{ph}$$

Da cui è possibile ricavare  $k_0$  come:

$$k^* - k_0 = \pm \sqrt{\frac{E_{ph} - E_g - Ak^{*2}}{B}}$$

I possibili valori di  $k_0$  sono pertanto dati da:

$$k_0 = k^* + \sqrt{\frac{E_{ph} - E_g - Ak^2}{B}} = 1.66 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k_0 = k^* - \sqrt{\frac{E_{ph} - E_g - Ak^2}{B}} = 0.34 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

In entrambi i casi, l'energia cinetica dell'elettrone in banda di conduzione è pari a:

$$E_K = E_C(k^*) - E_C(k_0) = B(k^* - k_0)^2 = 166 \text{ meV}$$

## Esercizio 7

Si considerino due campioni metallici con funzioni lavoro  $W_1 = 5$  eV,  $W_2 = 4.3$  eV. Determinare a che temperatura  $T_2$  deve essere portato il secondo materiale per garantire la stessa densità di corrente termoionica del primo campione alla temperatura  $T_1 = 425$  K.

## Soluzione 7

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Imponendo  $J_1 = J_2$  e assumendo  $A_1 \simeq A_2$ :

$$\frac{J_1}{J_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)}$$
$$0 = 2 \log\left(\frac{T_1}{T_2}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)$$

Trascurando la dipendenza quadratica dalla temperatura si ha:

$$0 \simeq -\frac{1}{k}\left(\frac{W_1}{T_1} - \frac{W_2}{T_2}\right)$$

Da cui quindi:

$$T_2 = \frac{W_2}{W_1} T_1 = 365.5 \text{ K}$$



## Esercizio 8

Determinare la massa DOS e di conduzione per lacune ed elettroni per il nitruro di boro (BN), sapendo che i minimi della BC sono centrati nei punti X, e note  $m_{l,BC}^* = 1.2m_e$ ,  $m_{t,BC}^* = 0.26m_e$ ,  $m_{hh}^* = 0.962m_e$ ,  $m_{lh}^* = 0.108m_e$ .

## Soluzione 8

Poiché i minimi della BC sono centrati nel punto X, solo metà degli ellissoidi rientra nella prima zona di Brillouin. La degenerazione del materiale è pertanto data da:

$$g = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

La massa DOS in banda di conduzione è quindi data da:

$$m_{DOS,n} = g^{\frac{2}{3}} m_l^{\frac{1}{3}} m_t^{\frac{2}{3}} = 0.9m_e$$

Per la massa DOS in banda di valenza occorre invece considerare entrambe le bande di lacune pesanti e leggere:

$$m_{DOS,p} = \left( m_{hh}^{\frac{3}{2}} + m_{lh}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.986m_e$$

Per la massa di conduzione in BC, ciascun minimo contribuisce con la stessa densità di stati. Per una generica direzione di campo, si osservano sempre 4 minimi contribuire con la massa trasversale, e 2 minimi contribuire con massa longitudinale. Pertanto:

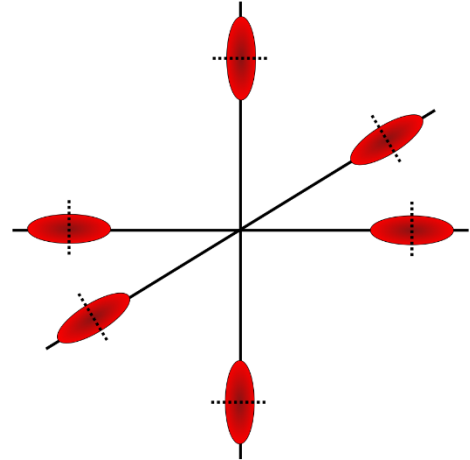
$$\frac{6}{m_c^*} = \frac{2}{m_l^*} + \frac{4}{m_t^*}$$

$$m_{c,n}^* = \frac{3m_l^* m_t^*}{m_t^* + 2m_l^*} = 0.352m_e$$

Infine, per la massa di conduzione in BV, occorre pesare ciascun minimo per il proprio contributo rispetto alla totalità degli stati, rappresentata dalla massa DOS:

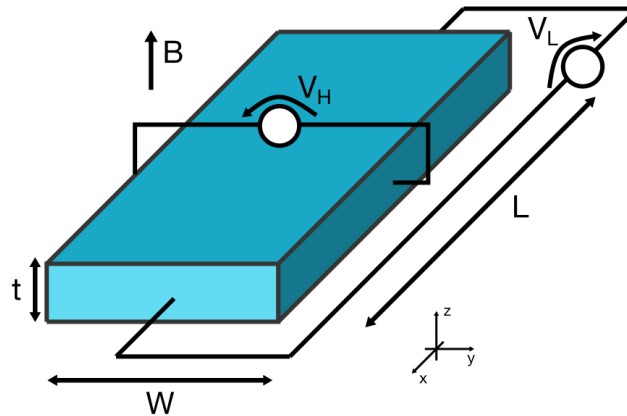
$$\frac{1}{m_{c,p}^*} = \frac{m_{hh}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}} m_{hh}^*} + \frac{m_{lh}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}} m_{lh}^*}$$

$$m_{c,p}^* = \frac{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}}}{m_{hh}^{\frac{1}{2}} + m_{lh}^{\frac{1}{2}}} = \frac{m_{hh}^{\frac{3}{2}} + m_{lh}^{\frac{3}{2}}}{m_{hh}^{\frac{1}{2}} + m_{lh}^{\frac{1}{2}}} = 0.748m_e$$

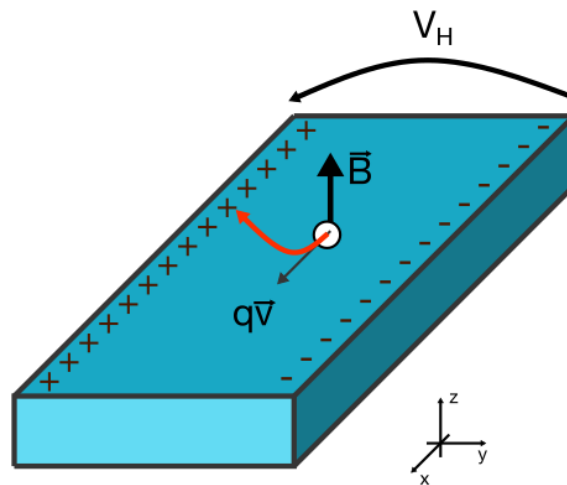


## Esercizio 9

Si consideri la barretta di silicio drogato sottoposta ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 2**, dove  $W = 1 \mu\text{m}$ ,  $L = 100 \mu\text{m}$ ,  $t = 100 \text{ nm}$ ,  $V_L = 1 \text{ V}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $V_H = 10 \text{ mV}$  positiva nel verso indicato in figura. Nota la corrente a temperatura ambiente  $I = 100 \mu\text{A}$ , determinare tipologia, mobilità e concentrazione dei portatori. Stimare quindi la corrente alle temperature  $T = 50 \text{ K}$  e  $T = 400 \text{ K}$ , assumendo che il semiconduttore permanga nel regime estrinseco di funzionamento.



## Soluzione 9



La corrente scorre in direzione  $x^+$ . Il prodotto  $q\vec{v}$  è pertanto orientato in direzione  $x^+$  sia per le lacune ( $q > 0, v \propto x^+$ ) che per gli elettroni ( $q < 0, v \propto x^-, q\vec{v} \propto x^+$ ). Il campo magnetico  $B$  è orientato come  $z^+$ , pertanto la forza di Lorentz tende a spostare i portatori verso  $y$ . Il segno della tensione di Hall rivela un accumulo di carica positiva in tale direzione, pertanto i portatori maggioritari sono lacune, ovvero il materiale è drogato p.

La mobilità si può ricavare dal bilancio tra la forza di Lorentz e quella di Coulomb:

$$|\mathcal{F}_L| = qvB = q\mu F_L B = q\mu \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W} = qF_T = |\mathcal{F}_C|$$

Da cui:

$$\mu_p = \frac{L V_H}{W V_L B} = 10000 \frac{cm^2}{Vs}$$

La concentrazione si può ricavare a partire dalla corrente ricordando:

$$I = GV_L = \sigma \frac{Wt}{L} V_L = (q\mu_p N_A) \frac{Wt}{L} V_L$$

$$N_A = \frac{I L}{V_L W t q\mu_p} = 6.25 \cdot 10^{17} cm^{-3}$$

A basse temperature (T = 50 K) il contributo dominante allo scattering nel silicio drogato è dato dalle impurezze ionizzate. Assumendo che il semiconduttore continui a lavorare in regime estrinseco, la concentrazione di portatori rimane circa pari a quella del drogante, pertanto è la variazione di mobilità a determinare la variazione di corrente:

$$\mu(T_1) \simeq \mu_{ii}(T_1) \propto T^{\frac{3}{2}}$$

$$I(50 K) \simeq I(300 K) \cdot \left(\frac{50}{300}\right)^{\frac{3}{2}} = 6.8 \mu A$$

Ad alte temperature (T = 400 K) il contributo dominante è invece dato dallo scattering fononico:

$$\mu(T_2) \simeq \mu_{ph}(T_2) \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

$$I(400 K) = I(300 K) \cdot \left(\frac{400}{300}\right)^{-\frac{3}{2}} = 64.95 \mu A$$

## Esercizio 10

Una barretta di silicio drogata n ( $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ) a temperatura ambiente contiene un eccesso di portatori minoritari  $p' = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Noto il tempo di ricombinazione dei minoritari  $\tau_p = 20 \text{ ns}$ , calcolare il tempo necessario affinché il quasi-livello di Fermi per le lacune aumenti di 50 meV, e la posizione del quasi-livello di Fermi per le lacune al tempo  $t = 750 \text{ ns}$ .

## Soluzione 10

In un semiconduttore fuori equilibrio, in assenza di fenomeni di generazione continui, i portatori in eccesso tendono a ricombinare secondo:

$$\delta p(t) \simeq \delta p(0) e^{-\frac{t}{\tau_p}}$$

Approssimando la concentrazione totale di lacune nel materiale alla sola componente in eccesso, si può scrivere:

$$\delta p(t) \simeq p(t) = N_V e^{-\frac{F_p(t) - E_V}{kT}}$$

Considerando pertanto  $F_p(\tilde{t}) = F_p(0) + 50 \text{ meV}$ , si può scrivere:

$$\delta p(\tilde{t}) = \delta p(0) e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_p}} = N_V e^{-\frac{F_p(0) - E_V}{kT}} e^{-\frac{50 \text{ meV}}{kT}} = \delta p(0) e^{-\frac{50 \text{ meV}}{kT}}$$

Pertanto:

$$\tilde{t} = \tau_p \cdot \frac{50 \text{ meV}}{kT} = 38.63 \text{ ns}$$

Al tempo  $t = 750 \text{ ns}$ , la concentrazione di portatori in eccesso è ridotta a:

$$\delta p(t) = \delta p(0) e^{-\frac{750 \text{ ns}}{\tau_p}} = 0.5 \text{ cm}^{-3} \ll 939 \text{ cm}^{-3} = \frac{n_i^2}{N_D} = p_0$$

Il materiale è pertanto tornato in condizioni di equilibrio: il livello di quasi-Fermi torna a coincidere con il livello di Fermi del sistema, che è ricavabile a partire dalla concentrazione di drogante,

$$N_D \simeq n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}}$$

$$E_C - E_F = -kT \log\left(\frac{N_D}{N_C}\right) = 125 \text{ meV}$$

Posto il riferimento energetico in corrispondenza dell'apice della banda di valenza, si ha quindi:

$$F_p(750 \text{ ns}) = E_F = 1.12 \text{ eV} - 125 \text{ meV} = 0.97 \text{ eV}$$