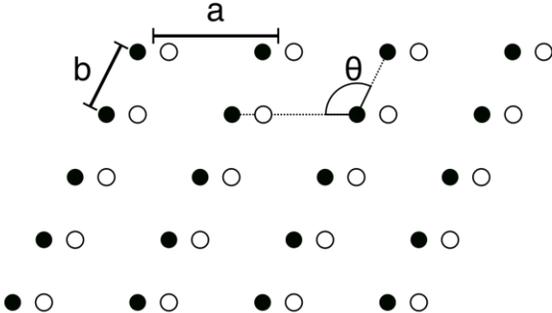


# 11/07/2024 – Appello 2

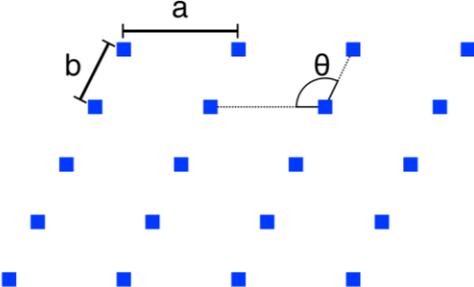
## Esercizio 1

Si consideri la struttura in **Fig. 1**. Identificare una combinazione base-reticolo e disegnare la corrispondente cella di Wigner-Seitz. Noti  $a = 1 \text{ nm}$ ,  $b = 0.5 \text{ nm}$  e  $\theta = 120^\circ$ , determinare la densità atomica superficiale.

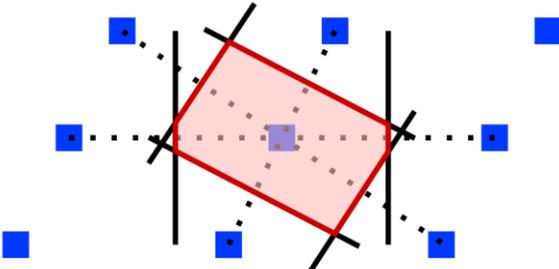


## Soluzione 1

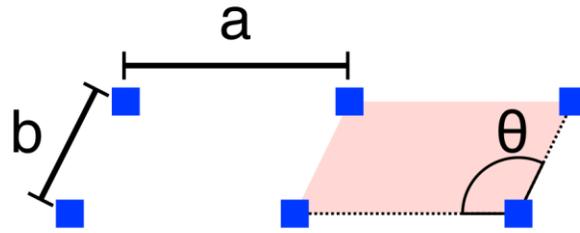
Una possibile base è data dalla coppia biatomica bianco-nero, usando la quale ci si riconduce ad un reticolo obliquo:



La cella di Wigner-Seitz si ottiene dalle bisettrici dei segmenti che congiungono ciascuna base alle sue prime vicine:



Ai fini del calcolo della densità atomica superficiale risulta tuttavia più semplice riferirsi alla cella in figura:



Pertanto:

$$\rho_{at} = \frac{N_{at/cell}}{A_{cell}} = \frac{N_{at/base} N_{basi/cell}}{A_{cell}} = \frac{2 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)}{a \cdot b \cdot \sin(180^\circ - \theta)} = \frac{2}{ab \sin(60^\circ)} = \frac{4}{ab\sqrt{3}} = 4.62 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$$

## Esercizio 2

Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico con catodo in oro ( $W = 5.3 \text{ eV}$ ). Determinare la massima lunghezza d'onda  $\lambda_{\max}$  di un fascio luminoso incidente sul catodo per osservare fotoemissione in assenza di polarizzazione ( $V_A = 0 \text{ V}$ ). Si imponga quindi  $\lambda = 0.2 \mu\text{m}$ . Tracciare un grafico quotato della velocità degli elettroni fotoemessi lungo il dispositivo nel caso  $V_A = -0.5 \text{ V}$ .

## Soluzione 2

Affinché si osservi fotoemissione deve valere:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} > W \quad \rightarrow \quad \lambda < \frac{hc}{W} \quad \rightarrow \quad \lambda_{\max} = \frac{hc}{W} = 0.234 \mu\text{m}$$

Con  $\lambda = 0.2 \mu\text{m}$  si ha pertanto fotoemissione. L'energia cinetica degli elettroni al catodo risulta:

$$E_{k,c} = \frac{hc}{\lambda} - W = 6.212 \text{ eV} - 5.3 \text{ eV} = 0.912 \text{ eV}$$

Corrispondente ad una velocità elettronica:

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \rightarrow \quad v_c = \sqrt{\frac{2E_{k,c}}{m_e}} = 0.56 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

L'energia cinetica varia lungo il dispositivo per effetto dell'accelerazione o decelerazione imposta dalla tensione esterna come:

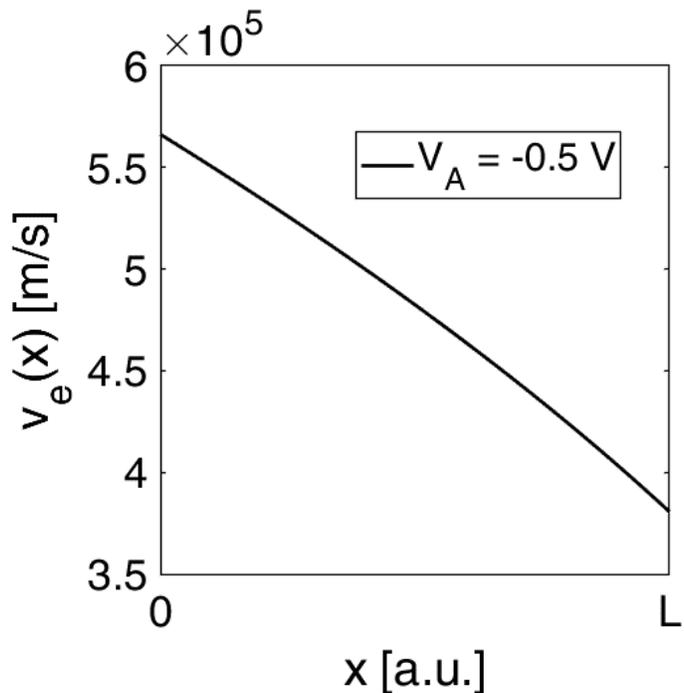
$$E_k(x) = E_{ph} - W + qV_A \cdot \frac{x}{L}$$

Conseguentemente, la velocità elettronica varia lungo il dispositivo come:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2(E_{ph} - W + qV_A \frac{x}{L})}{m_e}}$$

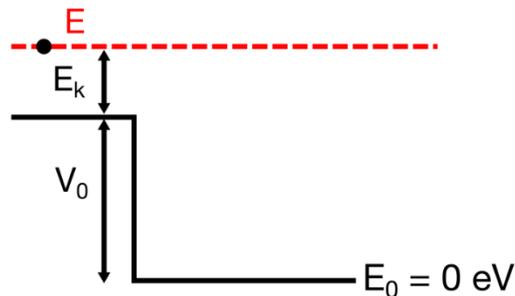
Nel caso di tensione negativa, la velocità diminuisce fino ad un minimo, raggiunto sempre all'anodo, di:

$$\begin{aligned} v_a(V_A = -0.5 \text{ V}) &= \sqrt{\frac{2(E_{ph} - W + qV_A)}{m_e}} \\ &= 0.38 \cdot 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$



### Esercizio 3

Si consideri il profilo di potenziale in **Fig. 2**, dove un elettrone di energia cinetica  $E_k = 1$  eV incide sulla discontinuità da sinistra verso destra. Sapendo che il flusso trasmesso è pari a 3 volte il flusso riflesso, determinare l'ampiezza  $V_0$  della discontinuità e l'energia totale  $E$  dell'elettrone.



### Soluzione 3

La somma di flusso riflesso e trasmesso deve essere pari alla totalità del flusso incidente, ovvero:

$$|T|^2 + |R|^2 = 1$$

Nota dal testo la relazione:

$$|T|^2 = 3|R|^2$$

È possibile ricavare il coefficiente di riflessione come:

$$|R|^2 = \frac{1}{4} = \frac{(k_2 - k_1)^2}{(k_2 + k_1)^2}$$

Ricordando la definizione del vettore d'onda nella regione 1 (a sinistra della discontinuità) e 2 (a destra della discontinuità):

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m_e E_k}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m_e (E_k + V_0)}}{\hbar}$$

Si nota immediatamente che dovrà essere  $k_2 > k_1$ . È quindi possibile semplificare l'espressione precedente come:

$$\frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{k_2}{2} = \frac{3}{2} k_1$$

$$k_2 = 3k_1$$

Sostituendo le definizioni di  $k_1$ ,  $k_2$  e nota l'energia cinetica  $E_k$  è quindi possibile ricavare  $V_0$ :

$$\sqrt{E_k + V_0} = 3\sqrt{E_k}$$

$$E_k + V_0 = 9E_k$$

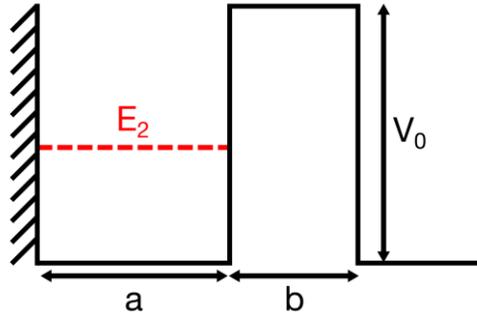
$$V_0 = 8E_k = 8 \text{ eV}$$

L'energia totale dell'elettrone, assunto come riferimento a potenziale nullo il fondo della regione 2, è quindi data da:

$$E = V_0 + E_k = 9 \text{ eV}$$

## Esercizio 4

Si consideri il sistema buca-barriera in **Fig. 3**, dove  $a = 1 \text{ nm}$ ,  $b = 2 \text{ nm}$ ,  $V_0 = 3 \text{ eV}$ . Determinare il campo  $F$  da applicare alla barriera affinché il tempo medio di tunneling per un elettrone localizzato sul secondo stato confinato della buca sia pari a  $t_{TUN} = 1 \text{ ps}$ . (Considerare l'approssimazione di buca a pareti infinite ai soli fini del calcolo dell'autostato.)



## Soluzione 4

Usando l'approssimazione di buca a pareti infinite, il secondo autostato risulta localizzato ad energia:

$$E_2 = 2^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} = 1.5 \text{ eV}$$

Il tempo di tunneling si può scrivere come:

$$t_{TUN} = \frac{t_{AR}}{P_T}$$

Dove, in approssimazione semiclassica, il tempo di andata/ritorno è dato da:

$$t_{AR} = \frac{2a}{v} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{2E_2}{m_e}}} = 2.75 \text{ fs}$$

Affinché il tempo di tunneling sia pari a 1 ps, la probabilità di tunneling attraverso la barriera deve quindi essere pari a:

$$P_T = \frac{t_{AR}}{t_{TUN}} = 2.7 \cdot 10^{-3}$$

In assenza di campo applicato, la probabilità di tunneling attraverso la barriera vale:

$$P_{T0} = e^{-2\alpha b}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_2)}}{\hbar} = 6.25 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Da cui:

$$P_{T0} = 1.383 \cdot 10^{-11} < P_T$$

Che è quindi insufficiente per garantire il tempo di tunneling richiesto. In prima ipotesi, si suppone che applicando un campo il sistema si porti in condizioni di tunneling Fowler-Nordheim, nelle quali vale:

$$P_T = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar F}(V_0 - E_2)^{\frac{3}{2}}}$$

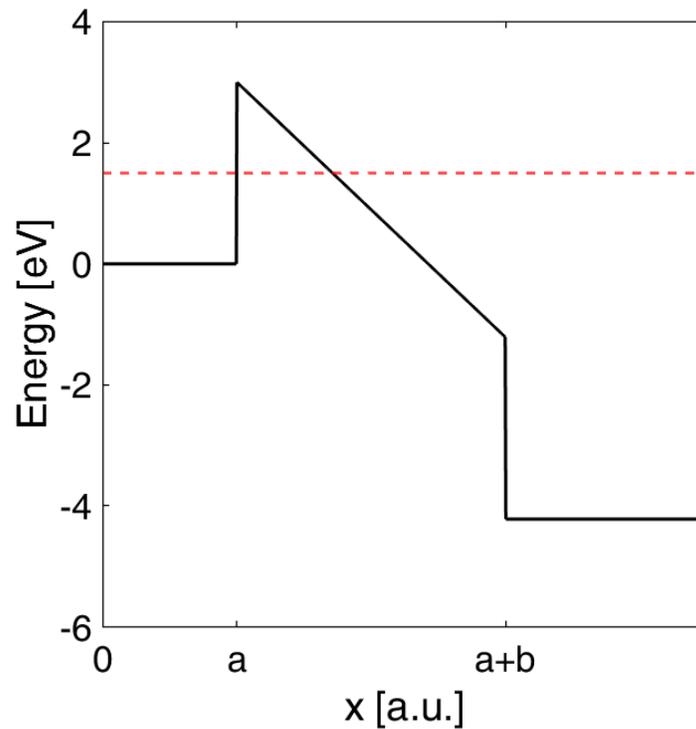
Invertendo l'espressione si può ricavare il campo richiesto:

$$F = -\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar}(V_0 - E_2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\log(P_T)} = 2.1 \frac{V}{nm}$$

Occorre adesso verificare la validità dell'ipotesi Fowler-Nordheim. L'estremo destro della barriera, a seguito dell'applicazione del campo, viene spostato ad energia:

$$E(x_b = b) = V_0 - qFb = V_0 - 4.2 eV = -1.2 eV < E_2$$

L'ipotesi Fowler-Nordheim risulta pertanto verificata:

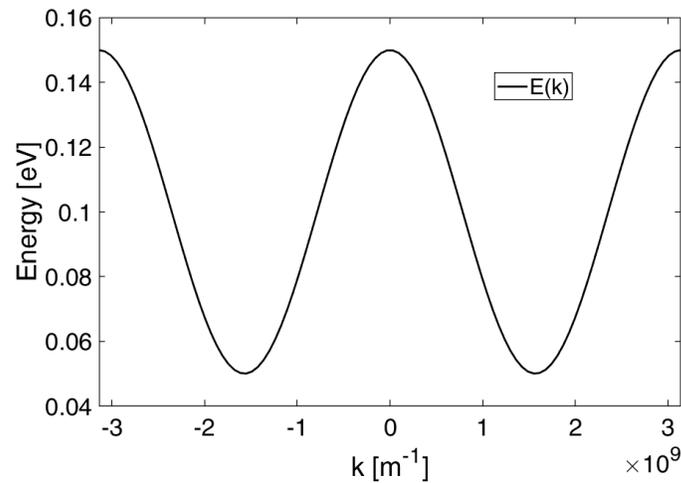


## Esercizio 5

Un cristallo monodimensionale è descritto dalla relazione di dispersione  $E(k) = E_0 + E_1 \cos(2ka)$ , dove  $E_0 = 100 \text{ meV}$ ,  $E_1 = 50 \text{ meV}$ ,  $a = 1 \text{ nm}$ . Tracciare un grafico quotato della relazione di dispersione  $E(k)$  e della velocità di gruppo  $v_g(k)$  nella prima zona di Brillouin (FBZ). Determinare quindi i valori di  $k$  nella FBZ per i quali la massa efficace è infinita.

## Soluzione 5

Il grafico della relazione di dispersione nella FBZ è riportato in figura:



Dove in particolare la minima e massima energia sono pari a:

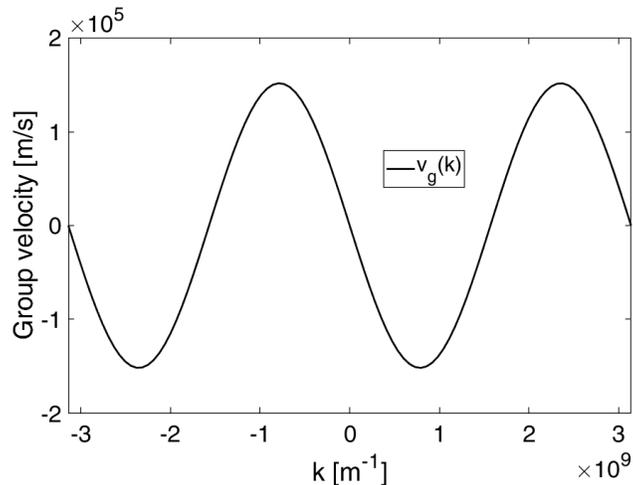
$$E_{min} = E_0 - E_1 = 50 \text{ meV}$$

$$E_{max} = E_0 + E_1 = 150 \text{ meV}$$

La velocità di gruppo è definita come:

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = -2E_1 a \sin(2ka)$$

Il cui grafico nella FBZ è riportato in figura:



La massa efficace è data da:

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}}$$

Derivando due volte la relazione di dispersione si ottiene:

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -2aE_1 \sin(2ka)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = -4a^2 E_1 \cos(2ka)$$

La massa efficace è quindi descritta da:

$$m^*(k) = -\frac{\hbar^2}{4a^2 E_1 \cos(2ka)}$$

Affinché la massa efficace sia infinita, deve quindi annullarsi il denominatore:

$$\cos(2ka) = 0$$

$$2ka = \pm \left( \frac{\pi}{2} + m\pi \right) \quad m = 0, 1, \dots$$

$$k = \pm \left( \frac{\pi}{4a} + m \frac{\pi}{2a} \right)$$

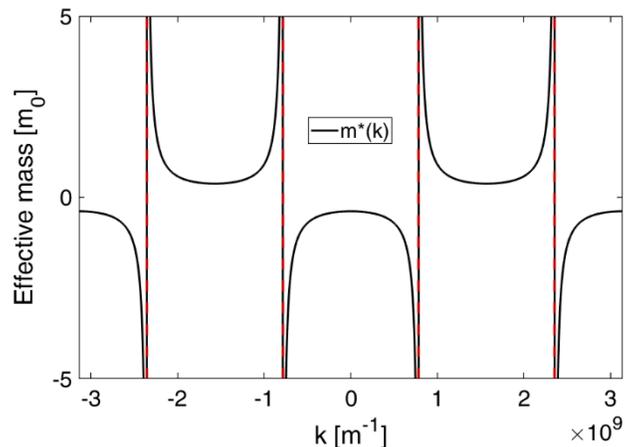
Poiché si è interessati solo ai valori di k nella FBZ, deve valere:

$$\frac{\pi}{4a} + m \frac{\pi}{2a} \leq \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad m \leq \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad m = 0, 1$$

I valori di k richiesti sono quindi:

$$k \in \left\{ -\frac{3\pi}{4a}, -\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{4a}, \frac{3\pi}{4a} \right\}$$

Il risultato può essere verificato tracciando il grafico:



## Esercizio 6

Si consideri un semiconduttore a gap diretto ( $m_{BC}^* = 0.1m_0$ ,  $m_{BV}^* = 0.4m_0$ ,  $E_g = 0.8$  eV). Determinare il momento iniziale  $k_i$  e finale  $k_f$  di un elettrone che venga promosso dalla banda di valenza alla banda di conduzione in presenza di un fotone di energia  $E_{ph} = 1$  eV e un fonone di momento  $k_{phn} = +10^8$  m<sup>-1</sup> ed energia  $E_{phn} = 100$  meV.

## Soluzione 6

Per un semiconduttore a gap diretto l'apice della banda di valenza e il fondo della banda di conduzione sono allineati in  $k = 0$ . Le due bande possono quindi essere descritte come:

$$E_V(k) = -Ak^2 = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$
$$E_C(k) = E_g + Bk^2 = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BC}^*}$$

Dove:

$$A = \frac{\hbar^2}{2m_{BV}^*} = 0.0955 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$$
$$B = \frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*} = 0.382 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$$

L'elettrone è inizialmente localizzato nella banda di valenza con momento  $k_i$ , e conseguentemente ad energia  $E_V(k_i)$ . Durante il processo, acquista energia per interazione sia con il fotone sia con il fonone, e momento per interazione con il fonone, fino a portarsi in banda di conduzione con momento  $k_f$  ed energia  $E_C(k_f)$ . Deve quindi valere:

$$E_C(k_f) - E_V(k_i) = E_{ph} + E_{phn}$$
$$k_f = k_i + k_{phn}$$

Sviluppando la prima espressione si ottiene:

$$E_g + Bk_f^2 + Ak_i^2 = E_{ph} + E_{phn}$$

Sostituendo la seconda espressione si ha:

$$E_g + B(k_i + k_{phn})^2 + Ak_i^2 = E_{ph} + E_{phn}$$
$$(A + B)k_i^2 + 2Bk_i k_{phn} + Bk_{phn}^2 - E_{ph} - E_{phn} + E_g = 0$$

È quindi possibile risolvere l'equazione di secondo grado per il momento iniziale:

$$k_i = \frac{-2Bk_{phn} \pm \sqrt{4B^2 k_{phn}^2 - 4(A + B)(Bk_{phn}^2 - E_{ph} - E_{phn} + E_g)}}{2(A + B)}$$

Da cui si ricavano due possibili valori di  $k_i$ :

$$k_{i1} = 7.117 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

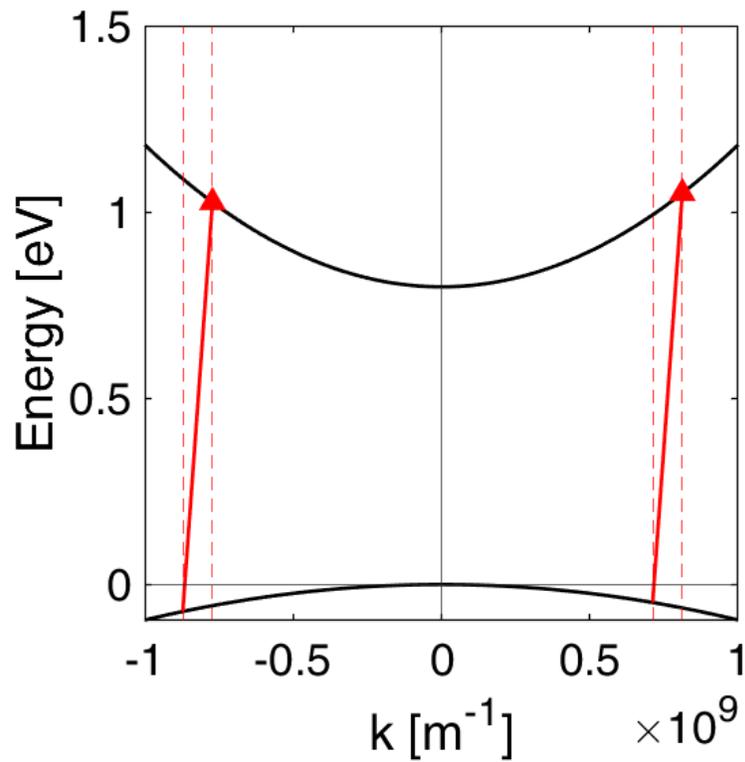
$$k_{i2} = -8.717 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

I corrispondenti momenti finali sono dati da:

$$k_{f1} = k_{i1} + k_{phn} = 8.117 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{f2} = k_{i2} + k_{phn} = -7.717 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

Le transizioni possibili possono essere rappresentate in un grafico E-k come:



## Esercizio 7

Si considerino due campioni di niobio ( $W_{\text{Nb}} = 4.3 \text{ eV}$ ) e alluminio ( $W_{\text{Al}} = 4.1 \text{ eV}$ ). Determinare a che temperatura deve essere portato l'alluminio per osservare la stessa densità di corrente termoionica del niobio a temperatura  $T_{\text{Nb}} = 350 \text{ K}$ , facendo ragionevoli approssimazioni.

## Soluzione 7

La densità di corrente termoionica è descritta dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Imponendo  $J_{\text{Nb}} = J_{\text{Al}}$  e assumendo  $A_{\text{Nb}} \approx A_{\text{Al}}$ :

$$\frac{J_{\text{Nb}}}{J_{\text{Nb}}} = \left(\frac{T_{\text{Nb}}}{T_{\text{Al}}}\right)^2 e^{-\frac{1}{k}\left(\frac{W_{\text{Nb}}}{T_{\text{Nb}}} - \frac{W_{\text{Al}}}{T_{\text{Al}}}\right)}$$
$$0 = 2 \log\left(\frac{T_{\text{Nb}}}{T_{\text{Al}}}\right) - \frac{1}{k}\left(\frac{W_{\text{Nb}}}{T_{\text{Nb}}} - \frac{W_{\text{Al}}}{T_{\text{Al}}}\right)$$

Trascurando la dipendenza quadratica dalla temperatura si ha:

$$0 \approx -\frac{1}{k}\left(\frac{W_{\text{Nb}}}{T_{\text{Nb}}} - \frac{W_{\text{Al}}}{T_{\text{Al}}}\right)$$

Da cui quindi:

$$T_{\text{Al}} = \frac{W_{\text{Al}}}{W_{\text{Nb}}} T_{\text{Nb}} = 333.72 \text{ K}$$

## Esercizio 8

Ad una barretta di fosforo di indio intrinseca ( $N_C(300\text{ K}) = 5.7 \cdot 10^{17}\text{ cm}^{-3}$ ,  $N_V(300\text{ K}) = 1.1 \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3}$ ,  $E_g = 1.344\text{ eV}$ ,  $W = 500\text{ }\mu\text{m}$ ,  $L = t = 100\text{ nm}$ ,  $\mu_n(300\text{ K}) = 5400\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $\mu_p(300\text{ K}) = 200\text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ ) è applicata una differenza di potenziale  $V_A = 3.3\text{ V}$ . Determinare la corrente attraverso la barretta a  $T_2 = 400\text{ K}$ .

## Soluzione 8

La corrente attraverso la barretta è data da:

$$I = GV$$

Dove la conduttanza  $G$  dipende dalla conducibilità e dalle dimensioni del dispositivo:

$$G = \sigma \frac{Wt}{L}$$

La conducibilità è data da:

$$\sigma = qn\mu_n + qp\mu_p$$

Poiché il dispositivo è intrinseco,  $n = p = n_i$ :

$$\sigma = qn_i(\mu_n + \mu_p)$$

La concentrazione intrinseca è data da:

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Dai dati del testo è possibile ricavare la concentrazione intrinseca a 300 K:

$$n_i(300\text{ K}) = 1.33 \cdot 10^7\text{ cm}^{-3}$$

Da cui si può ottenere la conducibilità a 300 K come:

$$\sigma(300\text{ K}) = qn_i(300\text{ K})(\mu_n(300\text{ K}) + \mu_p(300\text{ K})) = 1.194 \cdot 10^{-6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$$

Per calcolare la corrente alla temperatura richieste, occorre considerare le dipendenze dalla temperatura della concentrazione intrinseca e della mobilità (ricordando che, in un materiale intrinseco, l'unico fenomeno limitante per il trasporto è lo scattering fononico):

$$n_i \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

$$\mu \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

Conseguentemente, la conducibilità dipende dalla temperatura come:

$$\sigma \propto e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Pertanto:

$$\sigma(400 K) = \sigma(300 K) \cdot e^{-\frac{E_g}{2k}(\frac{1}{400} - \frac{1}{300})} = 7.86 \cdot 10^{-4} \frac{S}{m}$$

È quindi possibile ricavare la conduttanza alla temperatura richiesta:

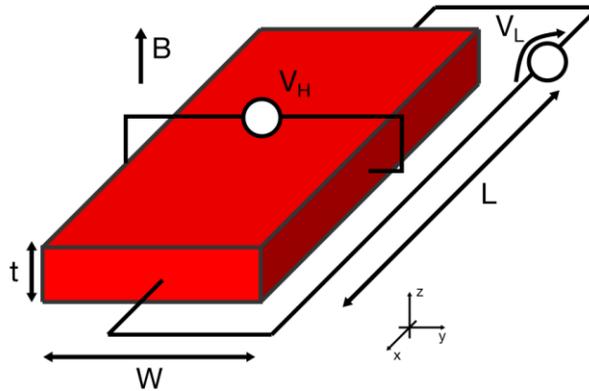
$$G(400 K) = \sigma(400 K) \frac{Wt}{L} = 393.2 \text{ nS}$$

Da cui la corrente:

$$I(400 K) = G(400 K) \cdot V_A = 1.297 \mu A$$

## Esercizio 9

Si consideri il campione di silicio drogato n sottoposto ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 4** ( $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ ,  $W = 10L$ ,  $\mu_n = 100 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ). Determinare modulo e verso della tensione di Hall  $V_H$  in presenza di una tensione longitudinale  $V_L = 1 \text{ V}$ .

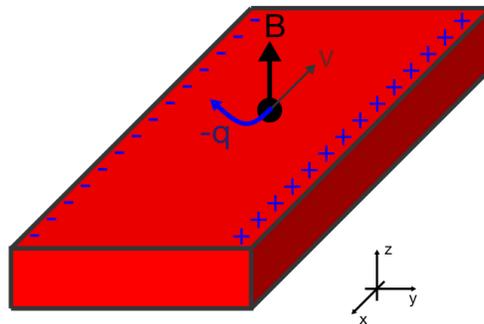


## Soluzione 9

Il materiale è drogato n, pertanto i portatori maggioritari sono elettroni con carica negativa  $q < 0$ . La corrente fluisce in direzione  $x_+$ , pertanto gli elettroni si muovono in direzione  $x_-$ . Il campo magnetico è orientato come  $z_-$ . La forza di Lorentz agente sugli elettroni,

$$\mathcal{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

È quindi orientata come  $y_-$  come indicato in figura:



I portatori in moto vengono quindi accumulati in direzione  $y_-$ , dove si osserverà un accumulo di carica netta negativa. La tensione di Hall sarà quindi positiva in direzione  $y_+$ . Per ricavare il modulo, occorre imporre l'uguaglianza all'equilibrio tra la forza di Lorentz e la forza elettrostatica (coulombiana):

$$|\mathcal{F}_L| = qvB = qF_T = |\mathcal{F}_C|$$

Ricordando che la velocità si può esprimere in funzione del campo longitudinale:

$$v = \mu F_L = \mu \frac{V_L}{L}$$

Mentre il campo trasversale è proporzionale alla tensione di Hall:

$$F_T = \frac{V_H}{W}$$

Si arriva infine a:

$$q\mu \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W}$$

$$V_H = \mu V_L B \cdot \frac{W}{L} = 10\mu V_L B = 100 \text{ mV}$$

## Esercizio 10

Si consideri un campione di silicio di lunghezza  $L = 100 \text{ nm}$  a temperatura ambiente ( $\mu_n(300 \text{ K}) = 200 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ ), il cui profilo di drogaggio è descritto dalla relazione  $N_D(x) = N_{D0}(1+5x/L)$  con  $N_{D0} = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Calcolare la densità di corrente di diffusione e il campo elettrico agli estremi del dispositivo.

## Soluzione 10

La densità di corrente di diffusione (trascurando la diffusione dei minoritari) è descritta da:

$$J_{diff} = qD_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

Dove il coefficiente di diffusione è legato alla mobilità dalla relazione di Einstein:

$$D_n = \frac{kT\mu_n}{q} = 5.17 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Approssimando la distribuzione spaziale della concentrazione elettronica alla concentrazione dei droganti è possibile scrivere:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \approx \frac{\partial N_D(x)}{\partial x} = \frac{5N_{D0}}{L} = 5 \cdot 10^{14} \frac{\text{cm}^{-3}}{\text{nm}}$$

$$J_{diff} = 4.14 \cdot 10^7 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} = 4.14 \frac{\text{kA}}{\text{cm}^2}$$

All'equilibrio termodinamico, tale corrente di diffusione è annullata da una corrente di deriva di pari modulo e verso opposto:

$$J_{diff} + J_{drift} = 0$$

$$J_{drift} = -J_{diff}$$

Ricordando che la corrente di deriva è data da:

$$J_{drift} = qnv = qn(x)\mu_n F(x)$$

È possibile ricavare il campo in funzione della coordinata spaziale approssimando la concentrazione elettronica alla concentrazione di drogante:

$$F(x) \approx -\frac{J_{diff}}{qN_D(x)\mu_n} = -kT\mu_n \cdot \frac{5N_{D0}}{L} \cdot \frac{1}{qN_{D0} \left(1 + \frac{5x}{L}\right) \mu_n} = -\frac{kT}{qL} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{5x}{L}\right)}$$

Agli estremi del dispositivo si ha quindi:

$$F(x=0) = -\frac{kT}{qL} = -12.94 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

$$F(x=L) = -\frac{1}{6} \frac{kT}{qL} = -2.15 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$