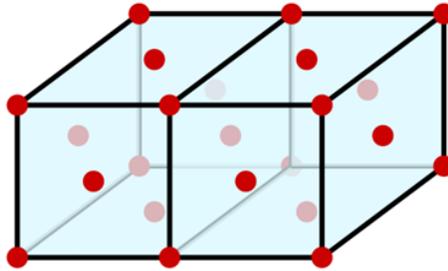


08/01/2025 – Appello 4

Esercizio 1

Si consideri il reticolo cubico a facce centrate in **Fig. 1**. Sapendo che la distanza fra i primi vicini è pari a $d_{NN} = 1.41$ nm, determinare la densità atomica e il packing factor.



Soluzione 1

Nel reticolo cubico a facce centrate, la distanza interatomica limitante per l'identificazione dei primi vicini è quella tra gli atomi sui vertici del cubo e quelli al centro delle facce. Pertanto:

$$d_{NN} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

È quindi possibile ricavare il passo reticolare come:

$$a = \frac{2d_{NN}}{\sqrt{2}} = 2 \text{ nm}$$

La densità atomica è quindi data da:

$$\rho = \frac{N_{at/cell}}{A_{cell}} = \frac{8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2}}{a^3} = \frac{4}{a^3} = 5.045 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$$

Il packing factor è infine dato dal rapporto fra il volume della cella e quello occupato dagli atomi, assunti sferici di diametro d_{NN} :

$$A_{at} = \left(8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_{NN}}{2}\right)^3 = \frac{2}{3} \pi d_{NN}^3$$
$$PF = \frac{A_{at}}{A_{cell}} = \frac{2\pi d_{NN}^3}{3 a^3} = \frac{2\pi d_{NN}^3}{3 \cdot 8d_{NN}^3} 2\sqrt{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 74.05\%$$

Esercizio 2

Si consideri un solido cristallino illuminato da una sorgente a raggi X di energia $E = 10 \text{ keV}$. Sapendo che il primo picco di diffrazione associato ai piani $\{111\}$ è ottenuto per $\theta = 35^\circ$, calcolare gli angoli di diffrazione per i piani $\{100\}$. Determinare quindi la famiglia di piani avente la minima distanza interplanare che dia origine a diffrazione.

Soluzione 2

Per avere diffrazione occorre soddisfare la condizione di Bragg:

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

La sorgente a raggi X ha lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 124 \text{ pm}$$

La distanza interplanare per la famiglia $\{111\}$ è pari a:

$$d_{111} = \frac{a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Noto l'angolo del primo ($n = 1$) picco di diffrazione, è quindi possibile ricavare il passo cristallino come:

$$\lambda = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin \theta$$

$$a = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2\sin\theta} = 0.188 \text{ nm}$$

Gli angoli di diffrazione per la famiglia $\{100\}$ sono quindi dati da:

$$d_{100} = a = 0.188 \text{ nm}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{2d_{100}}\right) \quad n_{max} = \left\lfloor \frac{2d_{100}}{\lambda} \right\rfloor = 3$$

$$n = 1 \rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2a}\right) = 19.34^\circ$$

$$n = 2 \rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{2a}\right) = 41.48^\circ$$

$$n = 3 \rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{3\lambda}{2a}\right) = 83.44^\circ$$

Viceversa, la famiglia di piani avente la minima distanza interplanare che dia origine a diffrazione è quella per cui:

$$d \geq \frac{\lambda}{2} = 62 \text{ pm}$$

Ricordando che la distanza interplanare per una generica famiglia $\{h, l, k\}$ è data da:

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}$$

Allora:

$$\frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}} \geq \frac{\lambda}{2}$$

$$\sqrt{h^2 + l^2 + k^2} \geq \frac{2a}{\lambda}$$

$$h^2 + l^2 + k^2 \leq \frac{4a^2}{\lambda^2} = 9.11$$

Poiché h , l , e k sono interi, deve allora valere:

$$h^2 + l^2 + k^2 = 9$$

Pertanto, la famiglia di piani considerata è la $\{221\}$.

Esercizio 3

Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico in cui un catodo in oro ($W = 5.3 \text{ eV}$) è illuminato da una sorgente contenente due componenti cromatiche ($\lambda_1 = 150 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 200 \text{ nm}$). Determinare la minima e massima tensione V_A da applicare al setup affinché solo la componente λ_1 dia origine a una fotocorrente all'anodo. È possibile avere fotocorrente solo dalla componente λ_2 ?

Soluzione 3

Ciascuna delle componenti cromatiche del fascio interagisce con il catodo mediante fotoni di diversa energia:

$$E_{phn1} = \frac{hc}{\lambda_1} = 8.28 \text{ eV}$$

$$E_{phn2} = \frac{hc}{\lambda_2} = 6.21 \text{ eV}$$

Per ciascuna è quindi possibile calcolare una corrispondente tensione di stopping:

$$V_{stop1} = -\frac{E_{phn1} - W}{q} = -2.98 \text{ V}$$

$$V_{stop2} = -\frac{E_{phn2} - W}{q} = -0.91 \text{ V}$$

Affinché solo la componente λ_1 dia origine a fotoemissione, è necessario imporre:

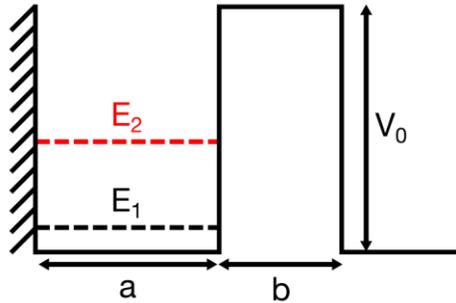
$$V_{stop1} < V_A < V_{stop2}$$

La tensione massima applicabile, pertanto, coincide con la tensione di stopping per la componente a λ_2 , sopra la quale si avrebbe fotoemissione per entrambe le componenti del fascio. Viceversa, la tensione minima coincide con la tensione di stopping per la componente a λ_1 , sotto la quale non si osserverebbe più fotocorrente.

Infine, essendo $V_{stop2} > V_{stop1}$, non è mai possibile ottenere fotoemissione dalla sola componente a λ_2 indipendentemente dalla tensione applicata.

Esercizio 4

Si consideri il sistema buca-barriera in **Fig. 2**, dove $a = 1 \text{ nm}$, $b = 2 \text{ nm}$. Sapendo che il tempo medio di tunneling per un elettrone sul secondo autostato della buca di potenziale è pari a $t_{TUN} = 1 \text{ ms}$, calcolare l'altezza V_0 della barriera di potenziale. Si consideri l'approssimazione di buca a pareti infinite per il solo calcolo dell'autostato.



Soluzione 4

Il tempo di tunneling è pari a:

$$t_{TUN} = \frac{t_{AR}}{P_T}$$

Per calcolare il tempo di andata e ritorno, occorre conoscere la velocità dell'elettrone. L'energia del secondo autostato della buca, in approssimazione di buca a pareti infinite, è data da:

$$E_2 = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2} = 1.5 \text{ eV}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 7.28 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_{AR} = \frac{2a}{v} = 2.75 \text{ fs}$$

La probabilità di tunneling è pertanto pari a:

$$P_T = \frac{t_{AR}}{t_{TUN}} = 2.74 \cdot 10^{-12}$$

Ricordando che, per una barriera rettangolare, la probabilità di tunneling è data da:

$$P_T = e^{-2\alpha b}$$

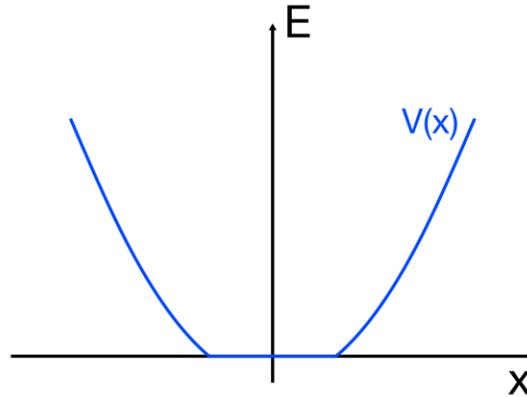
$$\alpha = -\frac{\ln(P_T)}{2b} = 6.65 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Pertanto:

$$V_0 = E_2 + \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} = 3.2 \text{ eV}$$

Esercizio 5

Si consideri il profilo di potenziale definito a tratti in **Fig. 3**, dove $V(x) = 0$ eV per $|x| < 1$ nm e $V(x) = \alpha x^2 - \gamma$ per $|x| > 1$ nm, con $\alpha = 50$ meV/(nm)². Determinare il valore del parametro γ e stimare la lunghezza d'onda del fotone emesso da un elettrone che rilassi dal secondo al primo autostato.



Soluzione 5

Il parametro γ si può calcolare imponendo la continuità del potenziale in $x = \pm 1$ nm:

$$V(1 \text{ nm}^-) = 0 \text{ eV} = \alpha(1 \text{ nm})^2 - \gamma = V(1 \text{ nm}^+)$$

$$0 = 50 \text{ meV} - \gamma$$

$$\gamma = 50 \text{ meV}$$

L'indeterminazione sul momento è approssimabile come:

$$p_{min} = -\sqrt{2mE} \quad p_{max} = +\sqrt{2mE} \quad \Delta p = 2\sqrt{2mE}$$

L'indeterminazione sulla posizione è approssimabile come:

$$x_{min} = -\left(\frac{E + \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad x_{max} = +\left(\frac{E + \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Delta x = 2\left(\frac{E + \gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \simeq n\hbar$$

$$4\sqrt{\frac{2m}{\alpha}} \cdot \sqrt{E(E + \gamma)}^{\frac{1}{2}} = n\hbar$$

$$E(E + \gamma) = \frac{n^2 \hbar^2}{16 \cdot 2m} \alpha$$

$$E^2 + \gamma E - n^2 \frac{\hbar^2 \alpha}{32m} = 0$$

Le soluzioni sono pertanto date da:

$$E = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + n^2 \frac{\hbar^2 \alpha}{8m}}}{2}$$

Dove è da considerarsi la soluzione positiva, corrispondente ad energie che cadono all'interno della regione di buca. Per i primi due autostati pertanto:

$$E_1 = -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + \frac{\hbar^2 \alpha}{32m}} = 2.3 \text{ meV}$$

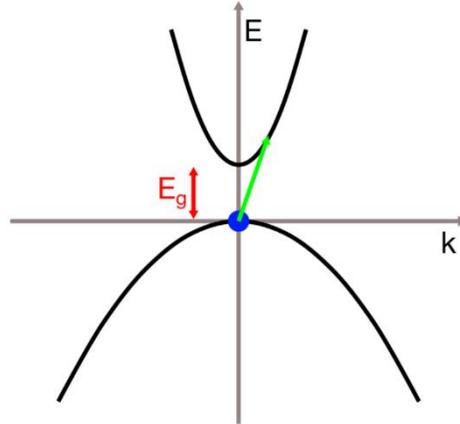
$$E_2 = -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 + \frac{\hbar^2 \alpha}{32m}} = 8.2 \text{ meV}$$

La lunghezza d'onda del fotone emesso nel rilassamento dal secondo al primo autostato è quindi pari a:

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} \simeq 210 \mu\text{m}$$

Esercizio 6

Si consideri il diagramma a bande in **Fig. 4** ($m_c^* = 0.1m_0$, $m_v^* = 0.6m_0$), dove un elettrone localizzato all'apice della banda di valenza interagisce con un fotone di energia $E = 1$ eV e un fonone primario di momento $k_{phn,1} = 10^9$ m⁻¹ ed energia trascurabile. Dopo aver determinato l'energia del gap E_g , si calcoli il numero di fononi secondari emessi dall'elettrone nel termalizzare sul fondo della banda di conduzione, sapendo che l'energia del singolo fonone secondario è $E_{phn,2} = 25$ meV.



Soluzione 6

Si ponga il riferimento energetico $E = 0$ eV all'apice della banda di valenza. Allora le due bande possono essere descritte come:

$$E_v = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*} \quad E_c = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c^*}$$

L'elettrone è inizialmente localizzato all'apice della banda di valenza, corrispondente a $k = 0$. A seguito dell'interazione con fotone ed elettrone, deve valere:

$$E_f = E_{ph} = 1 \text{ eV} \quad k_f = k_{phn,1} = 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Nota la massa efficace in banda di conduzione, si può quindi ricavare il gap come:

$$E_g = E_f - \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m_c^*} = E_{ph} - \frac{\hbar^2 k_{phn,1}^2}{2m_c^*} = 0.618 \text{ eV}$$

Nel processo di termalizzazione, l'elettrone dovrà quindi disperdere un'energia pari a:

$$\Delta E = E_c(k_f) - E_g = E_{ph} - E_g = 0.382 \text{ eV}$$

Corrispondente, pertanto, a un numero di fononi secondari pari a:

$$N_{phn2} = \frac{\Delta E}{E_{phn,2}} \simeq 15$$

Esercizio 7

Si considerino due campioni metallici, uno in oro ($W_{Au} = 5.3\text{eV}$) e l'altro di metallo ignoto. Sapendo che alla temperatura $T = 500\text{ K}$ si osserva una densità di corrente termoionica per il metallo ignoto pari a $1/100$ di quella osservata nel campione in oro, determinare la funzione lavoro del secondo campione.

Soluzione 7

Dalla legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J_{th} = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Dette J_1, J_2 le densità di corrente termoionica per il campione in oro e in metallo ignoto rispettivamente, deve quindi valere:

$$J_2 = A_2 T^2 e^{-\frac{W}{kT}} = \frac{1}{100} \cdot A_1 T^2 e^{-\frac{W_{Au}}{kT}} = J_1$$

Assumendo le costanti di Richardson per i due materiali circa uguali, ovvero $A_1 \simeq A_2$, si ha quindi:

$$W = -kT \cdot \ln\left(\frac{1}{100} e^{-\frac{W_{Au}}{kT}}\right) = -kT \cdot \left(-\ln(100) - \frac{W_{Au}}{kT}\right) = W_{Au} + kT \cdot \ln(100) = 5.5\text{ eV}$$

Esercizio 8

Si consideri silicio drogato con impurezze di tipo accettore $N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Nota l'energia di legame $E_A - E_V = 40 \text{ meV}$ e trascurando la dipendenza dalla temperatura delle densità di stati equivalenti in banda di conduzione e valenza N_C, N_V , determinare la temperatura T_{1-2} per la quale il livello di Fermi E_F coincide con l'energia dello stato accettore E_A , e la temperatura T_{2-3} per cui si ha $n_i = N_A$.

Soluzione 8

Ricordando la statistica di ionizzazione per le impurezze accettori:

$$N_A^- = \frac{N_A}{4e^{\frac{E_A - E_F}{kT}} + 1}$$

Alla temperatura T_{1-2} si ha quindi:

$$N_A^- = \frac{N_A}{5} \approx p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} = N_V e^{-\frac{E_A - E_V}{kT}}$$

Da cui quindi:

$$-\frac{E_A - E_V}{kT} = \ln\left(\frac{1}{5} \frac{N_A}{N_V}\right) \rightarrow T = -\frac{E_A - E_V}{k \ln\left(\frac{1}{5} \frac{N_A}{N_V}\right)} = 74 \text{ K}$$

Alla temperatura T_{2-3} invece, assumendo completa ionizzazione del drogante:

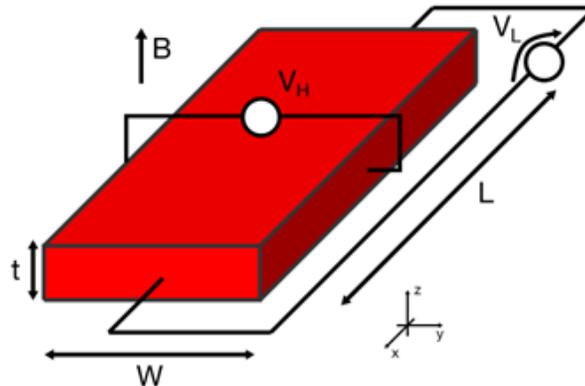
$$p \approx N_A = n_i(T_{2-3}) \approx n_i(300 \text{ K}) \cdot e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T_{2-3}} - \frac{1}{300 \text{ K}}\right)}$$

Da cui:

$$\left(\frac{1}{T_{2-3}} - \frac{1}{300 \text{ K}}\right) = -\frac{2k}{E_g} \cdot \ln\left(\frac{N_A}{n_i(300 \text{ K})}\right)$$
$$T_{2-3} = \frac{300 \text{ K}}{1 - \frac{2k \cdot 300 \text{ K}}{E_g} \ln\left(\frac{N_A}{n_i(300 \text{ K})}\right)} = 1103 \text{ K}$$

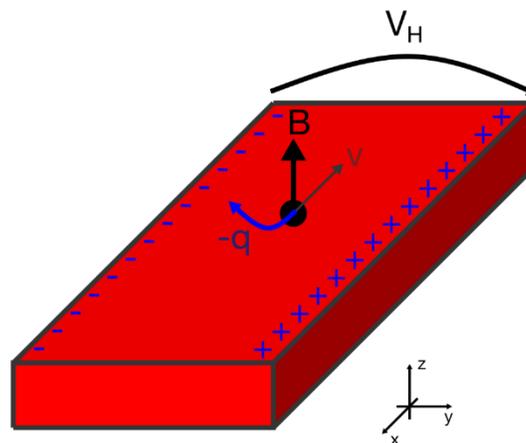
Esercizio 9

Si consideri la barretta di silicio drogato n sottoposta ad esperimento di effetto Hall in Fig. 5 ($W = 500$ nm, $L = 200$ nm, $t = 100$ nm, $V_L = 1$ V, $V_H = 50$ mV, $B = 1$ T, $T = 300$ K, $N_d = 10^{17}$ cm⁻³). Determinare il verso della tensione di Hall e la mobilità dei portatori maggioritari. Nota la corrente attraverso la barretta $I = 25$ μ A, calcolare quindi la velocità dei portatori.



Soluzione 9

Il campo magnetico è applicato in direzione z_+ . La corrente fluisce in direzione x_+ . I portatori maggioritari (elettroni, essendo il silicio drogato n) tendono pertanto ad accumularsi in direzione y_- , creando una zona di carica negativa. La tensione di Hall V_H sarà quindi positiva in direzione y_+ :



La mobilità si può ricavare imponendo il bilancio tra la forza di Lorentz e la forza di Coulomb:

$$|\mathcal{F}_L| = qvB = qF_T = |\mathcal{F}_C|$$

$$q\mu F_L B = qF_T$$

$$\mu \frac{V_L}{L} B = \frac{V_H}{W}$$

$$\mu_p = \frac{L}{W} \frac{V_H}{V_L} \frac{1}{B} = 200 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Per calcolare la velocità dei portatori, occorre determinare se il materiale sta operando in regime lineare o in regime di velocità saturata. Se il materiale operasse in regime lineare, la corrente sarebbe pari a:

$$I \simeq Wt \cdot qN_A \mu_p \cdot \frac{V_L}{L} = 80 \mu A > 25 \mu A$$

Poiché la corrente misurata attraverso la barretta è pari invece a 25 μA , il materiale sta operando in regime di velocità saturata. Vale pertanto:

$$I \simeq Wt \cdot qN_A v_{sat}$$

Da cui quindi:

$$v_{sat} = \frac{I}{Wt \cdot qN_A} = 3.125 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

Esercizio 10

Si consideri una barretta di Silicio drogata n a temperatura ambiente. La barretta viene irraggiata creando un eccesso di portatori minoritari in $x = 0$ pari a circa 2000 volte la concentrazione di minoritari all'equilibrio. Sapendo che il tempo di ricombinazione e la mobilità dei minoritari sono rispettivamente $\tau_p = 10 \text{ ns}$ e $\mu_p = 100 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, determinare a quale distanza L la concentrazione di minoritari in eccesso diventa pari a quella all'equilibrio.

Soluzione 10

Il profilo di concentrazione in eccesso lungo il materiale si può scrivere come:

$$\delta p(x) = \delta p(0)e^{-\frac{x}{L_p}}$$

Noto $\delta p(0) \approx 2000p_0$ e ricordando:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\frac{kT\mu_p}{q} \tau_p} = 1.61 \mu m$$

La distanza desiderata si calcola quindi imponendo:

$$\delta p(L) = p_0 = 2000 \cdot p_0 e^{-\frac{L}{L_p}}$$

$$L = L_p \cdot \ln(2000) = 12.23 \mu m$$