

ESS 26/06/2025 – Seconda PI

Esercizio 1

Si consideri un reticolo cristallino caratterizzato dalla relazione di dispersione $E(k) = E_0(1 - \cos(ka))$, dove $E_0 = 100$ meV, $a = 1$ nm e $\tau_m = 100$ fs, soggetto a un campo elettrico $F = 20$ kV/cm. Calcolare la variazione di momento Δk e la mobilità μ per un elettrone localizzato inizialmente in $k = 0$.

Soluzione 1

In presenza di un campo elettrico applicato, gli stati si muovono secondo l'equazione dinamica:

$$\frac{dk}{dt} + \frac{k}{\tau_m} = \frac{qF}{\hbar}$$

Dove la carica q è intesa con segno. A stato stazionario si avrà quindi:

$$k_\infty = \frac{qF}{\hbar} \tau_m = -0.3 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Da cui quindi:

$$\Delta k = (k_\infty - k_i) = k_\infty - 0 = -0.3 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

La mobilità è definita come:

$$\mu = \frac{q\tau_m}{m^*}$$

La massa efficace in k_∞ si può ricavare come:

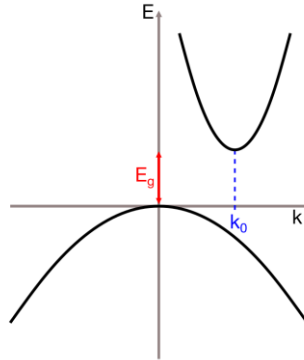
$$m^*(k_\infty) = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk^2}} \Big|_{k_\infty} = \frac{\hbar^2}{E_0 a^2 \cos(k_\infty a)} = 7.28 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.8 m_0$$

Da cui quindi:

$$\mu = \frac{q\tau_m}{m^*} = 219.7 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Esercizio 2

Si consideri il semiconduttore monodimensionale a gap indiretto in **Fig. 3** ($E_g = 1.3$ eV, $m_c^* = 0.1m_0$, $m_v^* = 0.8m_0$). Sapendo che l'energia minima del fotone che possa essere assorbito con un processo a due particelle è $E_{ph} = 1.6$ eV, determinare la posizione $k_{0,BC}$ del fondo della banda di conduzione, e il momento medio e il numero dei fononi di energia media $E_{phn} = 11$ meV necessari per termalizzare sul fondo della banda a seguito della promozione in BC.



Soluzione 2

Il semiconduttore è a gap indiretto; le bande sono quindi descritte da:

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_c^*} \quad E_V(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

In un processo a due particelle, l'elettrone si muove sul diagramma a parità di vettore d'onda k . Occorre quindi definire l'energia del gap a parità di k :

$$E_g(k) = E_C(k) - E_V(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

La minima energia del fotone assorbito con un processo a due particelle corrisponderà quindi al minimo valore del gap fra BV e BC a parità di k . Derivando, si ottiene che il minimo è localizzato in corrispondenza di:

$$\frac{dE_g}{dk} = \hbar^2 \cdot \left(\frac{k - k_0}{m_c^*} + \frac{k}{m_v^*} \right) = 0 \rightarrow k \frac{m_c^* + m_v^*}{m_c^* m_v^*} = \frac{k_0}{m_c^*} \rightarrow \bar{k} = k_0 \frac{m_v^*}{m_c^* + m_v^*} = \frac{8}{9} k_0$$

Ed assume un valore pari a:

$$E_g(\bar{k}) = E_g + \frac{\hbar^2 \left(-\frac{k_0}{9} \right)^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 \left(\frac{8k_0}{9} \right)^2}{2m_v^*} = E_g + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2 \cdot 81} \cdot \left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{64}{m_v^*} \right) = 1.6 \text{ eV} = E_{ph}$$

Da cui si può quindi ricavare il valore di k_0 come:

$$k_0 = \sqrt{(E_{ph} - E_g) \cdot \frac{162}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{64}{m_v^*}\right)}} = 2.66 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Dopo aver assorbito il fotone, l'elettrone si porta in BC con energia totale:

$$E_c(\bar{k}) = 1.33 \text{ eV}$$

Per rilassare sul fondo della banda di conduzione, deve quindi disperdere:

$$\Delta E = E_c(\bar{k}) - E_c(k_0) = 33 \text{ meV} \simeq 3 \cdot E_{phn} \rightarrow N_{phn} = \frac{\Delta E}{E_{phn}} = 3$$

$$\Delta k = \bar{k} - k_0 = -2.95 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \rightarrow |k_{phn}| = \frac{|\Delta k|}{N_{phn}} = 0.88 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 3

Si calcolino le masse DOS e di conduzione per elettroni e lacune nel β -carburo di silicio (β -SiC) note le masse efficaci $m_l = 0.68m_0$, $m_t = 0.25m_0$, $m_{hh} = 0.5m_0$, $m_{lh} = 0.23m_0$, e la degenerazione in banda di conduzione $g_c = 6$.

Soluzione 3

La massa DOS corrisponde alla massa dell'ellissoide isotropo avente lo stesso volume dei minimi della BC o dell'apice della BV, pertanto:

$$m_{DOS,BC}^* = g^{\frac{2}{3}} \cdot m_l^{\frac{1}{3}} \cdot m_t^{\frac{2}{3}} = 1.15 m_0$$

$$m_{DOS,BV}^* = \left(m_{hh}^{\frac{3}{2}} + m_{lh}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.6 m_0$$

Per la massa di conduzione in BC, data una direzione arbitraria del campo applicato, si osservano sempre 2 contributi di massa longitudinale e 4 contributi di massa trasversale; pertanto:

$$m_{c,n}^* = 6 \cdot \left(\frac{4}{m_t^*} + \frac{2}{m_l^*} \right)^{-1} = \frac{6m_l^*m_t^*}{4m_l^* + 2m_t^*} = 0.32 m_0$$

Per la massa di conduzione in BV, occorre pesare la massa efficace di ciascuna banda rispetto al contributo fornito per la massa DOS:

$$m_{c,p}^* = \left(\frac{m_{hh}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,BV}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{m_{hh}^*} + \frac{m_{lh}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,BV}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{m_{lh}^*} \right)^{-1} = \frac{m_{DOS,BV}^{\frac{3}{2}}}{m_{hh}^{\frac{1}{2}} + m_{lh}^{\frac{1}{2}}} = 0.39 m_0$$

Notare che lo stesso ragionamento si può applicare, equivalentemente, alla massa di conduzione in BC ottenendo la stessa formula riportata sopra, che implicitamente assume un identico contributo di ciascun minimo alla massa DOS.

Esercizio 4

Si consideri un metallo bidimensionale ($m^* = m_0$) alla temperatura $T = 0$ K. Nota la concentrazione elettronica in banda di conduzione $n = 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$, si calcoli la posizione del livello di Fermi E_F . Se si portasse il materiale alla temperatura $T = 300$ K, come varierebbe la posizione del livello di Fermi, assumendo pari concentrazione elettronica?

Soluzione 4

La concentrazione elettronica in BC è data, in generale, da:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g(E) f(E) dE$$

Dove $g(E)$ è la densità di stati, $f(E)$ è la statistica di Fermi-Dirac, ed E_C è l'energia del fondo della banda di conduzione. Ricordando che, per un metallo bidimensionale, si ha:

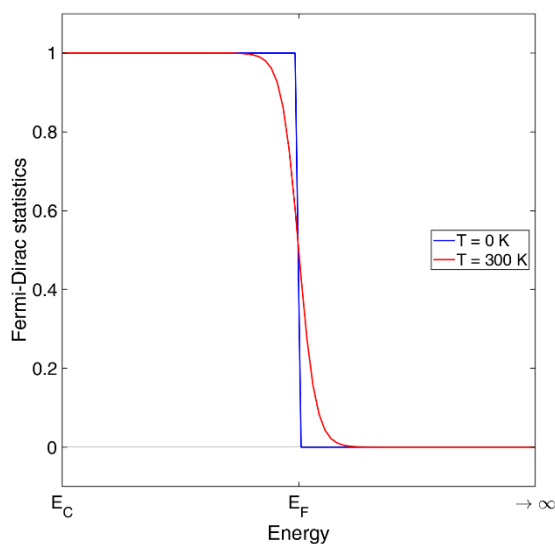
$$g(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$$

Alla temperatura di $T = 0$ K la statistica di Fermi-Dirac corrisponde ad un gradino di valore unitario per $E < E_F$, e valore nullo per $E > E_F$. Allora:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g(E) f(E) dE \simeq \int_{E_C}^{E_F} g(E) dE = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (E_F - E_C)$$

Nota la concentrazione elettronica, si può quindi calcolare la posizione del livello di Fermi relativamente al fondo della banda di conduzione come:

$$E_F = E_C + \frac{n \pi \hbar^2}{m^*} = E_C + 1.2 \text{ eV}$$



Variando la temperatura, la statistica di Fermi-Dirac si rilassa, inducendo un parziale svuotamento degli stati ad energia $E < E_F$ e, viceversa, una parziale occupazione degli stati ad energia $E > E_F$. Poiché la densità di stati è indipendente dall'energia, ciò non causa variazioni dell'integrale del prodotto $g(E)f(E)$, e pertanto non richiede correzioni del livello di Fermi per garantire parità di concentrazione. Ne consegue quindi che il livello di Fermi del sistema a 300 K risulta pari a quello del sistema a 0 K.

Esercizio 5

Si considerino due campioni metallici di pari area di litio ($W_1 = 3 \text{ eV}$) e di un secondo metallo ignoto. Sapendo che a $T = 300\text{K}$ si osserva nel secondo campione una densità di corrente per effetto termoionico J_2 pari a 10 volte quella del campione di litio, determinare la funzione lavoro W_2 del secondo metallo facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 5

Ricordando la legge di Richardson-Laue-Dushman per l'emissione termoionica:

$$J = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Allora si ha:

$$\frac{J_2}{J_1} = 10 = \frac{A_2 T_2^2}{A_1 T_1^2} e^{-\left(\frac{W_2}{kT} - \frac{W_1}{kT}\right)}$$

Assumendo come ragionevole approssimazione $A_1 = A_2$ e data, allora:

$$\log(10) = -\left(\frac{W_2}{kT} - \frac{W_1}{kT}\right)$$

$$W_2 = -kT \log(10) + W_1 = 2.94 \text{ eV}$$

Esercizio 6

Calcolare la resistività dell'antimoniuro di indio (InSb) intrinseco a $T_1 = 300 \text{ K}$ e $T_2 = 450 \text{ K}$, nota l'energia di gap $E_g = 0.17 \text{ eV}$, le densità di stati equivalenti $N_C(300 \text{ K}) = 4.16 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $N_V(300 \text{ K}) = 7.3 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, le masse efficaci di conduzione $m_n^* = 0.014m_0$, $m_p^* = 0.4m_0$, e la costante di rilassamento del momento $\tau_m = 600 \text{ fs}$.

Soluzione 6

La resistività di un semiconduttore intrinseco è data da:

$$\rho = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)}$$

Dove:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \quad \mu_n = \frac{q\tau_m}{m_n^*} \quad \mu_p = \frac{q\tau_m}{m_p^*}$$

A temperatura ambiente:

$$n_i(300 \text{ K}) = 2.07 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

$$\mu_n(300 \text{ K}) = 7.53 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

$$\mu_p(300 \text{ K}) = 2637 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Da cui quindi:

$$\rho(300 \text{ K}) = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)} = 3.9 \text{ m}\Omega \cdot \text{cm}$$

Per valutare la resistività a 450 K, occorre considerare le dipendenze dalla temperatura. Per la concentrazione intrinseca:

$$n_i \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Per la mobilità, essendo il semiconduttore intrinseco, il contributo limitante sarà dato dallo scattering fononico, da cui:

$$\mu \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

Ne consegue pertanto che:

$$\rho \propto \frac{1}{T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \cdot T^{-\frac{3}{2}}} = e^{\frac{E_g}{2kT}}$$

$$\rho(450 \text{ K}) = \rho(300 \text{ K}) \cdot e^{\frac{E_g}{2k} \left(\frac{1}{450} - \frac{1}{300} \right)} = \rho(300 \text{ K}) \cdot 0.334 = 1.3 \text{ m}\Omega \cdot \text{cm}$$

Esercizio 7

Si consideri Silicio drogato con impurezze di tipo accettore $N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che il livello di Fermi E_F coincide con l'energia dello stato accettore E_A a $T_1 = 60 \text{ K}$, determinare l'energia di legame $E_A - E_V$ per gli accettori e la temperatura T_2 per cui si ha $n_i = N_A$, facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 7

A basse temperature, la concentrazione di lacune in banda di valenza è circa pari alla concentrazione di droganti ionizzati:

$$p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} \simeq \frac{N_A}{1 + 4 \cdot e^{\frac{E_A - E_F}{kT}}} = N_A^-$$

Sapendo che a $T = 60 \text{ K}$ le energie E_A ed E_F coincidono, si ha quindi:

$$N_V e^{-\frac{E_A - E_V}{kT}} \simeq \frac{N_A}{5}$$

$$E_A - E_V = -kT \log\left(\frac{N_A}{5N_V}\right) = 32.4 \text{ meV}$$

Dove come ragionevole approssimazione si è trascurata la dipendenza dalla temperatura della densità di stati equivalente in banda di valenza.

La temperatura T_2 di transizione dal regime estrinseco al regime intrinseco si può invece calcolare imponendo (trascurando la dipendenza dalla temperatura della densità di stati equivalente in banda di valenza):

$$n_i(T) = n_i(300 \text{ K}) \cdot e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{300}\right)} = N_A$$

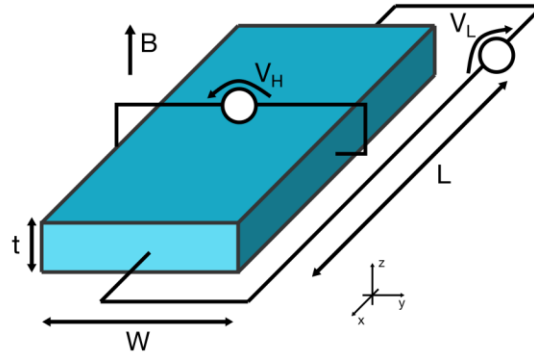
Da cui:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{300} - \frac{2k}{E_g} \cdot \log\left(\frac{N_A}{n_i(300 \text{ K})}\right)$$

$$T = \frac{1}{\frac{1}{300} - \frac{2k}{E_g} \cdot \log\left(\frac{N_A}{n_i(300 \text{ K})}\right)} = 1103 \text{ K}$$

Esercizio 8

Si consideri la barretta di silicio sottoposta ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 4** ($t = 100 \text{ nm}$, $W = 400 \text{ nm}$, $L = 2 \text{ } \mu\text{m}$, $B = 0.5 \text{ T}$). Applicando una tensione longitudinale $V_L = 1 \text{ V}$, si misurano una corrente $I = 10 \text{ } \mu\text{A}$ e una tensione trasversale $V_H = 5 \text{ mV}$ positiva nel verso indicato. Determinare tipologia e concentrazione dei droganti e mobilità dei portatori maggioritari.



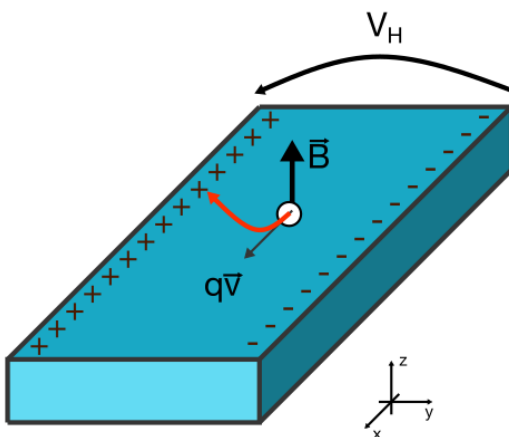
Soluzione 8

Il campo magnetico è applicato in direzione z^+ ; la corrente scorre in direzione x^+ , pertanto:

$$h^+: \quad q > 0, \quad v \propto x^+, B \propto z^+ \rightarrow \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \propto y^-$$

$$e^-: \quad q < 0, \quad v \propto x^-, B \propto z^+ \rightarrow \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \propto y^-$$

Quindi i portatori verranno deflessi verso y^- . Poiché la tensione V_H mostra un accumulo di carica positiva in tale direzione, se ne desume che il materiale è drogato, con portatori maggioritari dati dalle lacune: si sta quindi misurando del p-Silicio. La mobilità può essere ricavata imponendo il bilancio tra la forza di Lorentz e quella elettrostatica:



$$|\mathcal{F}_L| = qvB = qF = |\mathcal{F}_E|$$

$$q\mu \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L} \frac{L}{W} \frac{1}{B} = 500 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

La concentrazione può invece essere ricavata a partire dalla corrente:

$$I = GV_L = \sigma \frac{Wt}{L} V_L = qN_A \mu \frac{Wt}{L} V_L$$

$$N_A = \frac{I \cdot L}{q\mu Wt V_L} = 6.25 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Esercizio 9

Si consideri un resistore realizzato in p-silicio ($N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $T = 300 \text{ K}$) ai cui capi è applicata una differenza di potenziale $V_A = 1 \text{ V}$. Nota l'energia del fonone ottico $E_{phn} = 63 \text{ meV}$, la massa efficace di conduzione $m_p^* = 0.38m_0$ e la costante di rilassamento del momento $\tau_m^* = 100 \text{ fs}$, determinare la lunghezza critica L_{crit} al di sotto della quale il dispositivo opera in regime di velocità saturata.

Soluzione 9

Per un resistore in silicio drogato a temperatura ambiente, la concentrazione di portatori è circa pari alla concentrazione di drogante. La densità di corrente di deriva è pertanto data da:

$$J = qpv = qN_A v$$

Fintantoché il resistore lavora in regime lineare, la velocità è data da:

$$v = \mu F$$

Dove:

$$\mu = \frac{q\tau_m^*}{m_p^*} = 462 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Il regime lineare è valido fintantoché la velocità dei portatori è sufficientemente inferiore alla velocità di saturazione. Ricordando che per quest'ultima:

$$v_{sat} = \frac{v_{max}}{2}$$

Dove la velocità massima è quella tale per cui l'energia (cinetica) del portatore eguaglia l'energia del fonone ottico:

$$\frac{1}{2} m_p^* v_{max}^2 = E_{phn} \quad \rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{phn}}{m_p^*}} = 2.41 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad v_{sat} = \frac{v_{max}}{2} = 1.2 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A cui corrisponde un campo di saturazione:

$$F_{sat} = \frac{v_{sat}}{\mu} = 26 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

La lunghezza critica può quindi essere individuata, nota la tensione applicata ai capi del dispositivo, come:

$$L_{crit} = \frac{V_A}{F_{sat}} = 384 \text{ nm}$$

Pertanto, per $L \gg L_{crit}$ si avrà $F \ll F_{sat}$ e il resistore opera in regime lineare.

Viceversa, per $L \ll L_{crit}$ si avrà $F \gg F_{sat}$ e il resistore opera in regime di velocità saturata.

Esercizio 10

Si consideri una barretta di silicio (drogaggio n, $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, tempo di ricombinazione dei minoritari $\tau_p = 100 \text{ ns}$) dove un fascio laser impone una concentrazione in eccesso di portatori minoritari in superficie pari a $\delta p(0) = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che la concentrazione di portatori è modificata rispetto all'equilibrio solo entro i primi $300 \text{ }\mu\text{m}$ dalla superficie irraggiata a temperatura ambiente, calcolare la mobilità elettronica.

Soluzione 10

Partendo dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial x} + G_p - R_p$$

Il materiale è in stato stazionario e non si ha generazione nel volume, pertanto:

$$0 = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial x} - R_p$$

Poiché la concentrazione in eccesso è sufficientemente più piccola della concentrazione dei maggioritari all'equilibrio, il materiale opera in regime di debole iniezione, permettendo di approssimare il rate di ricombinazione come:

$$0 = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial x} - \frac{p}{\tau_p}$$

Infine, in assenza di campo applicato, la corrente è puramente diffusiva:

$$0 = \frac{1}{q} \frac{\partial J_{diff}}{\partial x} - \frac{p}{\tau_p} = \frac{1}{q} D_n \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{p}{\tau_p}$$

La concentrazione di minoritari nello spazio è quindi descritta da:

$$p(x) = p(0) e^{-\frac{x}{L_p}} + p_\infty$$

Dove la lunghezza di ricombinazione è data da:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

Il materiale si può considerare fuori equilibrio fintanto che $p(x)$ è significativamente diversa dalla concentrazione di lacune all'equilibrio termodinamico (p_∞). Come ragionevole punto, scegliamo:

$$\delta p(x) = p(x) - p(\infty) \simeq \delta p(0) e^{-\frac{x}{L_p}} = p_\infty$$

Da cui si ha quindi che il materiale si può considerare in condizione di fuori equilibrio fino a:

$$\bar{L} = -L_p \log\left(\frac{p_\infty}{\delta p(0)}\right) = -L_p \log\left(\frac{\frac{n_i^2}{N_D}}{\delta p(0)}\right) \simeq 27L_p$$

Sapendo dal testo che tale distanza è pari a 300 μm , si può quindi ricavare il valore della mobilità come:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\frac{kT \mu_p}{q} \tau_p} = \frac{\bar{L}}{27}$$

$$\mu_p = \left(\frac{\bar{L}}{27}\right)^2 \cdot \frac{q}{kT \tau_p} = 481 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$