

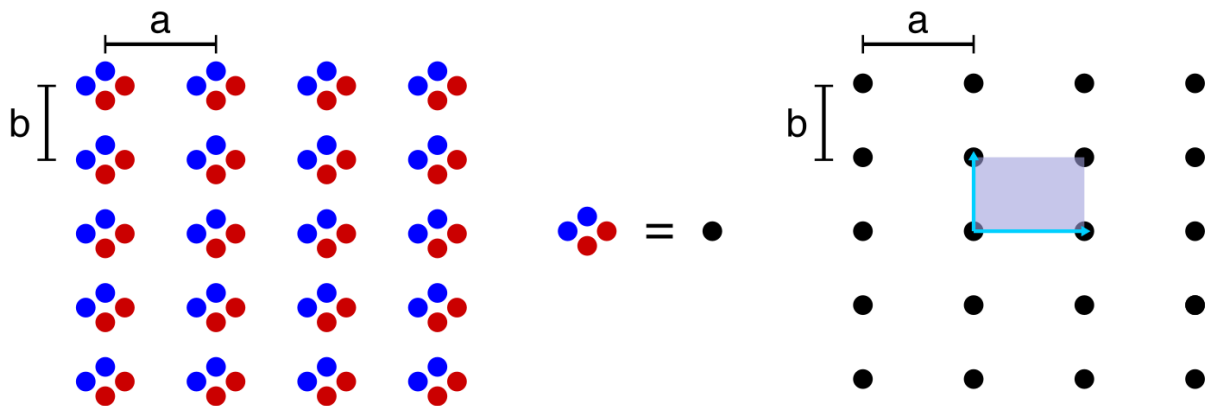
ESS 26/06/2025 - Appello

Esercizio 1

Si consideri il reticolo cristallino in **Fig. 1**. È un reticolo di Bravais? In caso negativo, proporre una possibile combinazione base-reticolo. Noti $a = 3 \text{ nm}$ e $b = 2 \text{ nm}$, calcolare la densità atomica superficiale.

Soluzione 1

Non è un reticolo di Bravais. Una possibile base è la terna quadriatomica in figura, che permette di ricondursi a un reticolo rettangolare:



Noti i parametri cristallini, è possibile ricavare la densità atomica superficiale come:

$$\rho_{at} = \frac{N_{at/cell}}{A_{cell}} = \frac{N_{basi/cella} \cdot N_{at/base}}{A_{cell}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4}{ab} = \frac{4}{ab} = 0.67 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$$

Esercizio 2

Un fascio elettronico accelerato da una tensione $V_A = 2.3 \text{ V}$ viene fatto incidere su un cristallo di passo $a = 0.7 \text{ nm}$. Determinare gli angoli di diffrazione per i piani delle famiglie $\{100\}$, $\{110\}$, $\{111\}$.

Soluzione 2

Ricordando la condizione di diffrazione di Bragg:

$$n\lambda = 2d \sin(\theta)$$

Poiché la sorgente di diffrazione è elettronica, occorre considerare la lunghezza d'onda di de Broglie associata al fascio elettronico. Ricordando:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e q V_A}} = 0.81 \text{ nm}$$

Per una generica famiglia di piani $\{hkl\}$, la distanza interplanare è legata al passo cristallino come:

$$d_{hkl} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + l^2 + k^2}}$$

Da cui:

$$d_{100} = a = 0.7 \text{ nm} \quad d_{110} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.495 \text{ nm} \quad d_{111} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.404 \text{ nm}$$

Il numero di picchi atteso per ciascuna famiglia di piani è dato da:

$$\frac{n\lambda}{2d_{hkl}} \leq 1 \rightarrow n \leq \left\lfloor \frac{2d_{hkl}}{\lambda} \right\rfloor = N$$

Da cui:

$$N_{100} = 1 \quad N_{110} = 1 \quad N_{111} = 0$$

Non si osserveranno quindi picchi di diffrazione dai piani $\{111\}$. Per $\{100\}$ e $\{110\}$, gli angoli di diffrazione si possono calcolare come:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n\lambda}{2d}\right)$$

$$\theta_{100} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d_{100}}\right) \simeq 35^\circ$$

$$\theta_{110} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d_{110}}\right) \simeq 55^\circ$$

Esercizio 3

Si consideri un oscillatore armonico, ed un elettrone in uno stato di sovrapposizione ottenuto combinando lo stato fondamentale ψ_0 ed il primo stato eccitato ψ_1 . Sapendo che tale stato di sovrapposizione oscilla con frequenza 1 THz, calcolare l'autovalore dello stato fondamentale.

Soluzione 3

Gli autovalori dell'oscillatore armonico sono descritti dalla formula:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Per lo stato di sovrapposizione composto dallo stato fondamentale ψ_0 e dal primo stato eccitato ψ_1 , la frequenza di oscillazione dello stato non-stazionario è quindi data da:

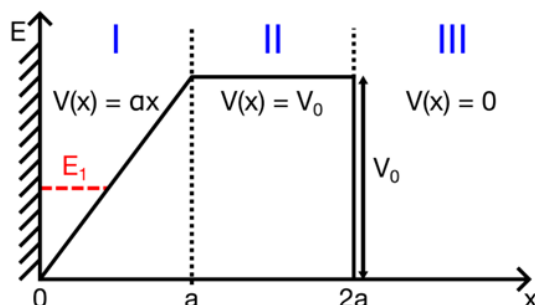
$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \frac{\hbar\omega_0}{\hbar} = \omega_0$$

Ne consegue pertanto che l'energia dello stato fondamentale è data da:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} = 2.07 \text{ meV}$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema buca-barriera in **Fig. 3**, dove la regione I si compone di una buca semilineare di larghezza $a = 1 \text{ nm}$, $V(x) = \alpha x$, $\alpha = 1 \text{ eV/nm}$, e la regione II di una barriera di pari larghezza a . Calcolare la probabilità P_T di tunneling dalla regione I alla regione III per un elettrone sul primo autostato E_1 della buca. Applicando un campo F nella sola regione II, sarebbe possibile ottenere $P_T = 10^{-1}$? Si usi il principio di indeterminazione di Heisenberg ai soli fini del calcolo dell'autostato E_1 .



Soluzione 4

L'energia del primo autostato della buca si può stimare a mezzo del principio di indeterminazione di Heisenberg. Le incertezze su posizione e momento si possono stimare come:

$$x_{min} = 0 \quad x_{max} = \frac{E}{\alpha} \rightarrow \Delta x = \frac{E}{\alpha}$$

$$p_{min} = -\sqrt{2mE} \quad p_{max} = +\sqrt{2mE} \rightarrow \Delta p = 2\sqrt{2mE}$$

Da cui:

$$\Delta p \Delta x \simeq n\hbar \geq \frac{\hbar}{2} \rightarrow \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha} E^{\frac{3}{2}} = n\hbar \rightarrow E = \left(\frac{\hbar \alpha}{2\sqrt{2m}} \right)^{\frac{2}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$

Il primo autostato è quindi posizionato a:

$$E_1 = \left(\frac{\hbar \alpha}{2\sqrt{2m}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.212 \text{ eV}$$

La probabilità di tunneling si può calcolare in approssimazione WKB come:

$$P_T = e^{-2 \int \alpha(x) dx} = e^{-2 \int \sqrt{2m_e(V_b(x) - E_1)} dx}$$

Il potenziale può essere definito a tratti come:

$$V_b(x) = \begin{cases} \alpha x & 0 < x < a \\ V_0 & a < x < 2a \end{cases}$$

In particolare, il valore del potenziale in regione II è dato da:

$$V_0 = \alpha a = 1 \text{ eV}$$

Mentre la coordinata c in cui inizia la regione effettiva di barriera è data da:

$$V(c) = E_1 \rightarrow c = \frac{E_1}{\alpha} = 0.212 \text{ nm}$$

Il calcolo può essere diviso nella composizione del tunneling attraverso le due semibarriere, una costituita dalla parete destra della buca, l'altra dalla regione II:

$$P_T = P_{T,1} \cdot P_{T,2}$$

La probabilità di tunneling attraverso la prima semibarriera è data da:

$$P_T = e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3q\hbar F_1}(\phi_i - \phi_f)^{\frac{3}{2}}}$$

Dove:

$$F_1 = -\frac{dV}{dq} = -\frac{\alpha}{q} = -\frac{1V}{nm} \quad \phi_i = V(c) - E_1 = 0 \quad \phi_f = V_0 - E_1 = 0.788 \text{ eV}$$

La probabilità di tunneling attraverso la prima semibarriera è quindi pari a:

$$P_{T_1} = e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3q\hbar F_1}(\phi_i - \phi_f)^{\frac{3}{2}}} = 8.5 \cdot 10^{-3}$$

La probabilità di tunneling attraverso la seconda barriera è pari a:

$$P_{T_2} = e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_0 - E_1)}{\hbar}}a} = 1.135 \cdot 10^{-4}$$

Da cui una probabilità di tunneling complessiva:

$$P_T = P_{T_1} \cdot P_{T_2} = 9.61 \cdot 10^{-7}$$

Per ottenere una probabilità complessiva $P_T = 0.1$ applicando un campo solo in regione II, occorrerebbe soddisfare:

$$P_{T_2} = \frac{0.1}{P_{T_1}} = 11.8$$

Tuttavia, poiché la probabilità di tunneling è sempre $0 < P_T < 1$, tale vincolo è impossibile da soddisfare. Pertanto, non è possibile garantire la probabilità di tunneling richiesta applicando un campo nella sola regione II.

Esercizio 5

Una particella è caratterizzata da una relazione di dispersione $\omega(k) = \omega_0 \cos(ka)$. Costruendo un pacchetto d'onde con peso gaussiano centrato in $k_0 = 10^9 \text{ m}^{-1}$, si osservano una deviazione standard nello spazio $\sigma_x(t)$ costante e pari a $\sigma_x = 10 \text{ nm}$, e una velocità di gruppo del pacchetto $v_g = -2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Sapendo che $a < 2 \text{ nm}$, calcolare il valore dei parametri (a , ω_0) della relazione di dispersione, e la deviazione standard σ_k della funzione peso gaussiana.

Soluzione 5

In corrispondenza del k_0 fornito dal testo, il pacchetto non subisce ulteriore dispersione nello spazio: la sua deviazione standard $\sigma_x(t)$ è costante. Ne consegue che il parametro di dispersione β deve annullarsi in k_0 :

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} = -\frac{1}{2} \omega_0 a^2 \cdot \cos(ka)$$

$$\beta(k_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \cos(k_0 a) = 0 \quad \rightarrow \quad k_0 a = \pm \frac{n\pi}{2}$$

Si ha quindi che:

$$a = \frac{n\pi}{2k_0} = n \cdot 1.57 \text{ nm}$$

Poiché dal testo è noto che $a < 2 \text{ nm}$, sarà quindi $n = 1$ e $a = 1.57 \text{ nm}$. Nota la velocità di gruppo si può allora ricavare il parametro ω_0 :

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = -\omega_0 a \cdot \sin(ka)$$

$$v_g(k_0) = -\omega_0 a \cdot \sin(k_0 a) = -2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

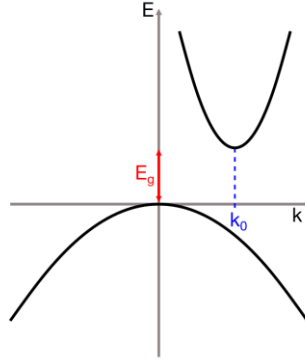
$$\omega_0 = -\frac{v_g(k_0)}{a \sin(k_0 a)} = 1273 \frac{\text{Trad}}{\text{s}} = 2\pi \cdot 202 \text{ THz}$$

Infine, il parametro σ_k della funzione peso può essere desunto, sapendo che la deviazione standard nello spazio non aumenta, proprio da σ_x . Infatti:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{\alpha} t} = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2\sigma_k^2}} \quad \rightarrow \quad \sigma_k = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2}} = 0.71 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 6

Si consideri il semiconduttore monodimensionale a gap indiretto in **Fig. 3** ($E_g = 1.3$ eV, $m_c^* = 0.1m_0$, $m_v^* = 0.8m_0$). Sapendo che l'energia minima del fotone che possa essere assorbito con un processo a due particelle è $E_{ph} = 1.6$ eV, determinare la posizione $k_{0,BC}$ del fondo della banda di conduzione (BC). Calcolare quindi il momento medio e il numero dei fononi di energia media $E_{phn} = 11$ meV necessari per termalizzare sul fondo della BC a seguito della promozione in BC.



Soluzione 6

Il semiconduttore è a gap indiretto; le bande sono quindi descritte da:

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_c^*} \quad E_V(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

In un processo a due particelle, l'elettrone si muove sul diagramma a parità di vettore d'onda k . Occorre quindi definire l'energia del gap a parità di k :

$$E_g(k) = E_C(k) - E_V(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v^*}$$

La minima energia del fotone assorbito con un processo a due particelle corrisponderà quindi al minimo valore del gap fra BV e BC a parità di k . Derivando, si ottiene che il minimo è localizzato in corrispondenza di:

$$\frac{dE_g}{dk} = \hbar^2 \cdot \left(\frac{k - k_0}{m_c^*} + \frac{k}{m_v^*} \right) = 0 \rightarrow k \frac{m_c^* + m_v^*}{m_c^* m_v^*} = \frac{k_0}{m_c^*} \rightarrow \bar{k} = k_0 \frac{m_v^*}{m_c^* + m_v^*} = \frac{8}{9} k_0$$

Ed assume un valore pari a:

$$E_g(\bar{k}) = E_g + \frac{\hbar^2 \left(-\frac{k_0}{9} \right)^2}{2m_c^*} + \frac{\hbar^2 \left(\frac{8k_0}{9} \right)^2}{2m_v^*} = E_g + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2 \cdot 81} \cdot \left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{64}{m_v^*} \right) = 1.6 \text{ eV} = E_{ph}$$

Da cui si può quindi ricavare il valore di k_0 come:

$$k_0 = \sqrt{(E_{ph} - E_g) \cdot \frac{162}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{m_c^*} + \frac{64}{m_v^*}\right)}} = 2.66 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Dopo aver assorbito il fotone, l'elettrone si porta in BC con energia totale:

$$E_c(\bar{k}) = 1.33 \text{ eV}$$

Per rilassare sul fondo della banda di conduzione, deve quindi disperdere:

$$\Delta E = E_c(\bar{k}) - E_c(k_0) = 33 \text{ meV} \simeq 3 \cdot E_{phn} \rightarrow N_{phn} = \frac{\Delta E}{E_{phn}} = 3$$

$$\Delta k = \bar{k} - k_0 = -2.95 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1} \rightarrow |k_{phn}| = \frac{|\Delta k|}{N_{phn}} = 0.88 \cdot 10^8 \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 7

Calcolare la resistività dell'antimoniuro di indio (InSb) intrinseco a $T_1 = 300\text{ K}$ e $T_2 = 450\text{ K}$, nota l'energia di gap $E_g = 0.17\text{ eV}$, le densità di stati equivalenti $N_C(300\text{ K}) = 4.16 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ e $N_V(300\text{ K}) = 7.3 \cdot 10^{18}\text{ cm}^{-3}$, le masse efficaci di conduzione $m_n^* = 0.014m_0$, $m_p^* = 0.4m_0$, e la costante di rilassamento del momento $\tau_m = 600\text{ fs}$.

Soluzione 7

La resistività di un semiconduttore intrinseco è data da:

$$\rho = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)}$$

Dove:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \quad \mu_n = \frac{q\tau_m}{m_n^*} \quad \mu_p = \frac{q\tau_m}{m_p^*}$$

A temperatura ambiente:

$$n_i(300\text{ K}) = 2.07 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$$

$$\mu_n(300\text{ K}) = 7.53 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

$$\mu_p(300\text{ K}) = 2637 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

Da cui quindi:

$$\rho(300\text{ K}) = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)} = 3.9\text{ m}\Omega \cdot \text{cm}$$

Per valutare la resistività a 450 K, occorre considerare le dipendenze dalla temperatura. Per la concentrazione intrinseca:

$$n_i \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$$

Per la mobilità, essendo il semiconduttore intrinseco, il contributo limitante sarà dato dallo scattering fononico, da cui:

$$\mu \propto T^{-\frac{3}{2}}$$

Ne consegue pertanto che:

$$\rho \propto \frac{1}{T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \cdot T^{-\frac{3}{2}}} = e^{\frac{E_g}{2kT}}$$

$$\rho(450\text{ K}) = \rho(300\text{ K}) \cdot e^{\frac{E_g}{2k} \left(\frac{1}{450} - \frac{1}{300} \right)} = \rho(300\text{ K}) \cdot 0.334 = 1.3\text{ m}\Omega \cdot \text{cm}$$

Esercizio 8

Si consideri Silicio drogato con impurezze di tipo accettore $N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che il livello di Fermi E_F coincide con l'energia dello stato accettore E_A a $T_1 = 60 \text{ K}$, determinare l'energia di legame $E_A - E_V$ per gli accettori e la temperatura T_2 per cui si ha $n_i = N_A$, facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 8

A basse temperature, la concentrazione di lacune in banda di valenza è circa pari alla concentrazione di droganti ionizzati:

$$p = N_V e^{-\frac{E_F - E_V}{kT}} \simeq \frac{N_A}{1 + 4 \cdot e^{-\frac{E_A - E_F}{kT}}} = N_A^-$$

Sapendo che a $T = 60 \text{ K}$ le energie E_A ed E_F coincidono, si ha quindi:

$$N_V e^{-\frac{E_A - E_V}{kT}} \simeq \frac{N_A}{5}$$

$$E_A - E_V = -kT \log\left(\frac{N_A}{5N_V}\right) = 32.4 \text{ meV}$$

Dove come ragionevole approssimazione si è trascurata la dipendenza dalla temperatura della densità di stati equivalente in banda di valenza.

La temperatura T_2 di transizione dal regime estrinseco al regime intrinseco si può invece calcolare imponendo:

$$n_i(T) = n_i(300 \text{ K}) \cdot e^{-\frac{E_g}{2k}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{300}\right)} = N_A$$

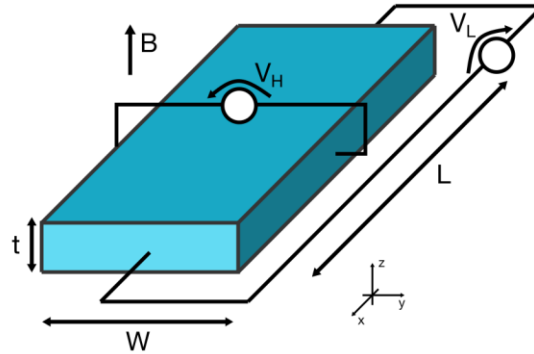
Da cui:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{300} - \frac{2k}{E_g} \cdot \log\left(\frac{N_A}{n_i(300 \text{ K})}\right)$$

$$T = \frac{1}{\frac{1}{300} - \frac{2k}{E_g} \cdot \log\left(\frac{N_A}{n_i(300 \text{ K})}\right)} = 1103 \text{ K}$$

Esercizio 9

Si consideri la barretta di silicio sottoposta ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 4** ($t = 100 \text{ nm}$, $W = 400 \text{ nm}$, $L = 2 \text{ } \mu\text{m}$, $B = 0.5 \text{ T}$). Applicando una tensione longitudinale $V_L = 1 \text{ V}$, si misurano una corrente $I = 10 \text{ } \mu\text{A}$ e una tensione trasversale $V_H = 5 \text{ mV}$ positiva nel verso indicato. Determinare tipologia, concentrazione e mobilità dei droganti.



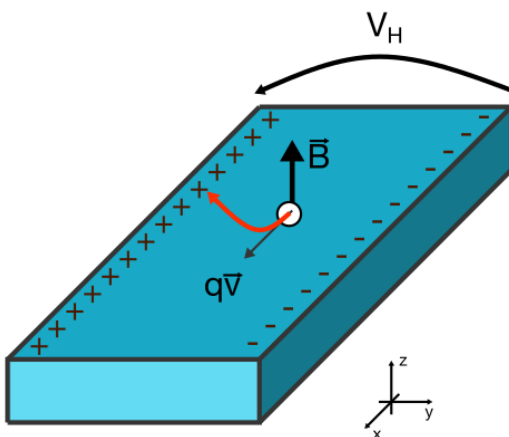
Soluzione 9

Il campo magnetico è applicato in direzione z^+ ; la corrente scorre in direzione x^+ , pertanto:

$$h^+: \quad q > 0, \quad v \propto x^+, B \propto z^+ \rightarrow \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \propto y^-$$

$$e^-: \quad q < 0, \quad v \propto x^-, B \propto z^+ \rightarrow \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} \propto y^-$$

Quindi i portatori verranno deflessi verso y^- . Poiché la tensione V_H mostra un accumulo di carica positiva in tale direzione, se ne desume che il materiale è drogato, con portatori maggioritari dati dalle lacune: si sta quindi misurando del p-Silicio. La mobilità può essere ricavata imponendo il bilancio tra la forza di Lorentz e quella elettrostatica:



$$|\mathcal{F}_L| = qvB = qF = |\mathcal{F}_E|$$

$$q\mu \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{W}$$

$$\mu = \frac{V_H}{V_L} \frac{L}{W} \frac{1}{B} = 500 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$

La concentrazione può invece essere ricavata a partire dalla corrente:

$$I = GV_L = \sigma \frac{Wt}{L} V_L = qN_A \mu \frac{Wt}{L} V_L$$

$$N_A = \frac{I \cdot L}{q\mu Wt V_L} = 6.25 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Esercizio 10

Si consideri una barretta di silicio (drogaggio n, $N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, tempo di ricombinazione dei minoritari $\tau_p = 100 \text{ ns}$) dove un fascio laser impone una concentrazione in eccesso di portatori minoritari in superficie pari a $\delta p(0) = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che la concentrazione in eccesso supera la concentrazione d'equilibrio solo entro i primi $300 \text{ }\mu\text{m}$ dalla superficie irraggiata a temperatura ambiente, calcolare la mobilità elettronica.

Soluzione 10

Partendo dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial x} + G_p - R_p$$

Il materiale è in stato stazionario e non si ha generazione nel volume, pertanto:

$$0 = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial x} - R_p$$

Poiché la concentrazione in eccesso è sufficientemente più piccola della concentrazione dei maggioritari all'equilibrio, il materiale opera in regime di debole iniezione, permettendo di approssimare il rate di ricombinazione come:

$$0 = \frac{1}{q} \frac{\partial J}{\partial x} - \frac{p}{\tau_p}$$

Infine, in assenza di campo applicato, la corrente è puramente diffusiva:

$$0 = \frac{1}{q} \frac{\partial J_{diff}}{\partial x} - \frac{p}{\tau_p} = \frac{1}{q} D_n \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{p}{\tau_p}$$

La concentrazione di minoritari nello spazio è quindi descritta da:

$$p(x) = p(0) e^{-\frac{x}{L_p}} + p_\infty$$

Dove la lunghezza di ricombinazione è data da:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

Il materiale si può considerare fuori equilibrio fintanto che $p(x)$ è significativamente diversa dalla concentrazione di lacune all'equilibrio termodinamico (p_∞). Come ragionevole punto, scegliamo:

$$\delta p(x) = p(x) - p(\infty) \simeq \delta p(0) e^{-\frac{x}{L_p}} = p_\infty$$

Da cui si ha quindi che il materiale si può considerare in condizione di fuori equilibrio fino a:

$$\bar{L} = -L_p \log\left(\frac{p_\infty}{\delta p(0)}\right) = -L_p \log\left(\frac{\frac{n_i^2}{N_D}}{\delta p(0)}\right) \simeq 27L_p$$

Sapendo dal testo che tale distanza è pari a 300 μm , si può quindi ricavare il valore della mobilità come:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\frac{kT \mu_p}{q} \tau_p} = \frac{\bar{L}}{27}$$

$$\mu_p = \left(\frac{\bar{L}}{27}\right)^2 \cdot \frac{q}{kT \tau_p} = 481 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$$