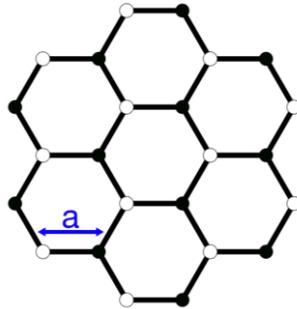


## Soluzione appello 2 – 18/07/2025

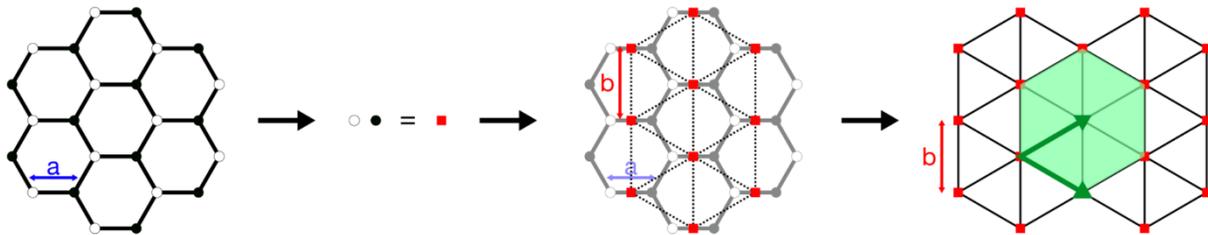
### Esercizio 1

Si consideri la struttura cristallina del grafene in **Fig. 1**. Determinare base, reticolo e vettori primitivi. Noto  $a = 0.14 \text{ nm}$ , calcolare la densità atomica e la densità elettronica, sapendo che ogni atomo contribuisce con 4 elettroni di valenza.

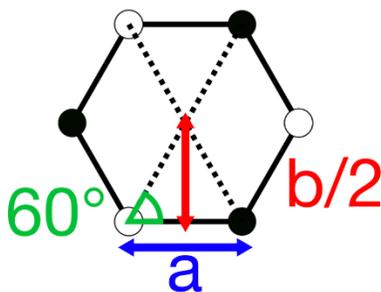


### Soluzione 1

Non è un reticolo di Bravais: non è possibile individuare una coppia di vettori primitivi che determini univocamente ogni nodo del reticolo. Identificando come base la coppia bianco/nero, si ottiene un reticolo esagonale di passo  $b$  (in verde la cella primitiva):



Il passo  $b$  può essere ricavato a partire da considerazioni geometriche:



$$\frac{b/2}{a} = \tan(60^\circ) \quad \rightarrow \quad b = a \tan(60^\circ) = a\sqrt{3} = 0.242 \text{ nm}$$

Così che l'area della cella esagonale è data da 6 volte l'area del triangolo equilatero elementare di lato  $b$ :

$$A_{cell} = 6 \cdot \frac{1}{2} \left( b \cdot \frac{b}{2} \cdot \tan(60^\circ) \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2} a^2$$

Ogni cella contiene 6 basi condivise ciascuna fra 3 celle, e 1 base "propria", da cui:

$$\rho_{at} = \frac{2 \left( \frac{6}{3} + 1 \right)}{A_{cell}} = \frac{6}{A_{cell}} = 3.9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$$

Infine, per la densità elettronica:

$$\rho_{e^-} = Z \cdot \rho_{at} = 4 \cdot \rho_{at} = 1.57 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$$

## Esercizio 2

Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico in cui un campione in oro ( $W = 5.1 \text{ eV}$ ) è illuminato da un fascio bicromatico composto da una prima componente a  $\lambda_1 = 100 \text{ nm}$  e una seconda componente a  $\lambda_2 = 150 \text{ nm}$ . Determinare l'intervallo di tensioni  $V_A$  affinché si osservi effetto fotoelettrico dalla sola componente  $\lambda_1$ . Data  $V_A = 5 \text{ V}$ , calcolare la lunghezza d'onda di de Broglie all'anodo.

## Soluzione 2

L'energia del fotone per le due sorgenti vale:

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 12.4 \text{ eV} > W$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = 8.27 \text{ eV} > W$$

Pertanto, in assenza di tensione applicata, entrambe le sorgenti danno origine ad emissione per effetto fotoelettrico. Per ciascuna sorgente è possibile calcolare la corrispondente tensione di stopping:

$$V_{stop,1} = \frac{W - E_1}{q} = -7.3 \text{ V}$$

$$V_{stop,2} = \frac{W - E_2}{q} = -3.17 \text{ V}$$

Pertanto:

- Per  $V_A > -3.17 \text{ V}$ , si osserverà effetto fotoelettrico da entrambe le sorgenti;
- Per  $V_A < -7.3 \text{ V}$ , non si osserverà effetto fotoelettrico per nessuna sorgente;
- Per  $-7.3 \text{ V} < V_A < -3.17 \text{ V}$ , si avrà inibizione dell'effetto fotoelettrico per la sorgente  $\lambda_2$ , e si osserverà invece effetto fotoelettrico dalla sola componente  $\lambda_1$ .

Considerando una tensione applicata di  $V_A = 5 \text{ V}$ , entrambe le sorgenti danno origine ad effetto fotoelettrico. Dipendentemente dal fotone con cui l'elettrone interagisce, si potrà quindi avere:

$$E_{k,a,1} = E_1 - W + qV_A = 12.3 \text{ eV} \quad \rightarrow \quad \lambda_{dB,1} = 0.35 \text{ nm}$$

$$E_{k,a,2} = E_2 - W + qV_A = 8.17 \text{ eV} \quad \rightarrow \quad \lambda_{dB,2} = 0.43 \text{ nm}$$

### Esercizio 3

Un corpo nero sferico  $BB_1$  emette il 70% della potenza di un secondo corpo nero  $BB_2$  di pari raggio. Nota la lunghezza d'onda di emissione di picco  $\lambda_1 = 1 \mu\text{m}$  del corpo nero  $BB_1$ , calcolare la temperatura del corpo nero  $BB_2$ .

### Soluzione 3

La temperatura del corpo nero  $BB_1$  è ricavabile a partire dalla legge di Wien:

$$T_1 = \frac{c_w}{\lambda_1} = 2800 \text{ K}$$

Nota la relazione tra le potenze emesse dai due corpi, e ricordando la legge di Stefan-Boltzmann:

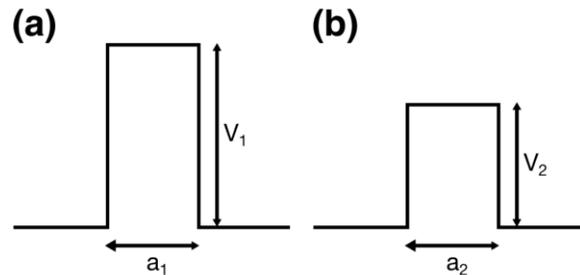
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = 0.7$$

Da cui quindi:

$$T_2 = \frac{T_1}{(0.7)^{\frac{1}{4}}} = 3061 \text{ K}$$

#### Esercizio 4

Si considerino le due barriere di potenziale in **Fig. 2**, corrispondenti a due strati di ossido in  $\text{SiO}_2$  ( $V_1 = 3.1 \text{ eV}$ ) e  $\text{HfO}_2$  ( $V_2 = 2.2 \text{ eV}$ ). Sapendo che lo strato di  $\text{SiO}_2$  è spesso  $a_1 = 1 \text{ nm}$ , determinare lo spessore  $a_2$  dell' $\text{HfO}_2$  per garantire la medesima corrente di tunneling in assenza di campo applicato, per elettroni ad energia  $E = 1 \text{ eV}$ .



#### Soluzione 4

La corrente di tunneling attraverso un ossido è proporzionale alla probabilità di tunneling attraverso l'equivalente barriera di potenziale:

$$I_{tun} \propto P_{tun}$$

Ricordando che per una barriera rettangolare, in assenza di campo applicato:

$$P_{tun} = e^{-2\alpha a} = e^{-2\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar}}a}$$

Allora imporre l'uguaglianza delle correnti equivale ad imporre l'uguaglianza delle probabilità di tunneling:

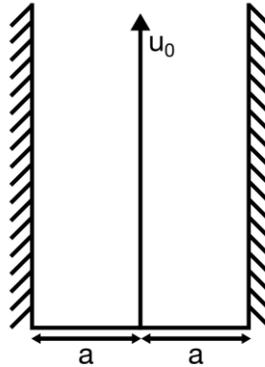
$$P_{tun,1} = e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar}}a_1} = e^{-2\sqrt{\frac{2m(V_2-E)}{\hbar}}a_2} = P_{tun,2}$$

$$a_1\sqrt{(V_1 - E)} = a_2\sqrt{(V_2 - E)}$$

$$a_2 = a_1 \sqrt{\frac{V_1 - E}{V_2 - E}} = 1.323 \text{ nm}$$

### Esercizio 5

Si considerino le buche accoppiate in **Fig. 3**, dove  $a = 1 \text{ nm}$ . Determinare il modulo  $u_0$  della barriera affinché lo stato non stazionario ottenuto dalla sovrapposizione dei primi due autostati oscilli a una frequenza  $f_{1-2} = 10 \text{ THz}$ .



### Soluzione 5

Ricordando che per un sistema di buche accoppiate gli autostati sono disposti in doppietti pari-dispari caratterizzati dalle relazioni di dispersione:

$$\tan(k_d a) = 0$$

$$\tan(k_p a) = -\frac{\hbar^2 k_p}{m_e u_0}$$

Nota la larghezza  $a$  delle buche, è possibile ricavare l'energia del primo autostato dispari  $E_2$  come:

$$\tan(k_2 a) = 0 \rightarrow k_2 a = n\pi \rightarrow (n = 1) \rightarrow k_2 = \frac{\pi}{a} = 3.14 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$E_2 = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_e} = 0.376 \text{ eV}$$

Nota la frequenza di oscillazione dello stato non stazionario, l'energia del corrispondente autostato pari è data da:

$$E_1 = E_2 - \hbar \nu_{1-2} = 0.334 \text{ eV} \quad \rightarrow \quad k_1 = 2.96 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Ne consegue pertanto che il modulo  $u_0$  della barriera deve essere:

$$u_0 = -\frac{\hbar^2 k_1}{m_e \tan(k_1 a)} = 1.26 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

## Esercizio 6

Un elettrone in un cristallo di passo  $a = 2 \text{ nm}$  è descritto da un'autofunzione  $\psi_k(x) = u_k(x)e^{ikx}$ . Sapendo che l'autofunzione torna in fase dopo 4 passi reticolari, determinare il valore del vettore d'onda cristallino  $k$ . Tracciare quindi il profilo della parte reale dell'autofunzione  $\psi_k(x)$  su 6 passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

## Soluzione 6

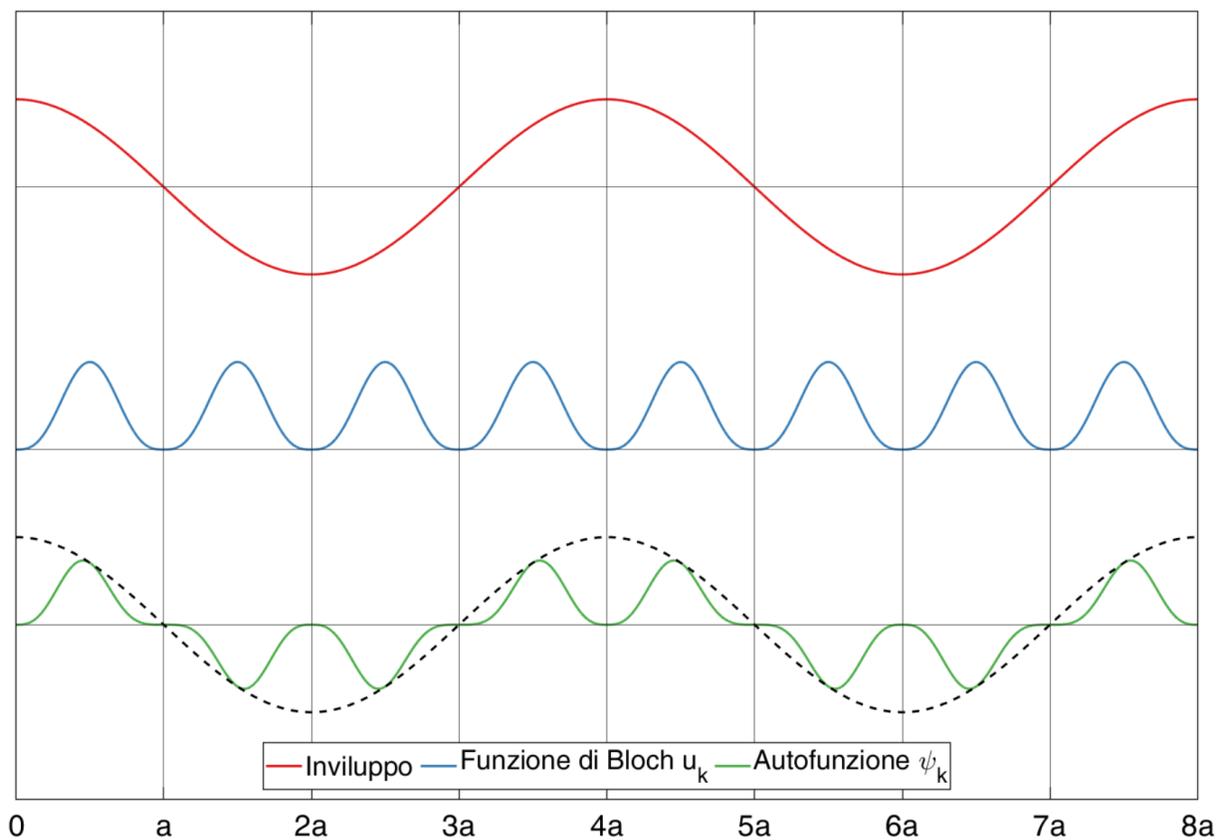
Dalla condizione di periodicità dell'autofunzione:

$$\psi_k(x) = u_k(x)e^{ikx} = u_k(x + 4a)e^{ik(x+4a)} = u_k(x)e^{ik(x+4a)} = \psi_k(x + 4a)$$

$$e^{ikx} = e^{ikx} e^{ik4a}$$

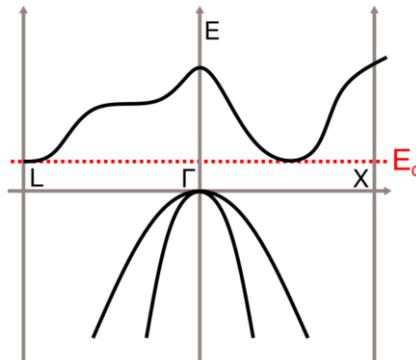
$$e^{ik4a} = e^{i2\pi} = 1$$

$$k = \frac{2\pi}{4a} = 0.78 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$



### Esercizio 7

Si consideri la relazione di dispersione in forma ridotta del semiconduttore 3D mostrata in **Fig. 4**, dove si evidenziano due valli isoenergetiche in banda di conduzione, una in corrispondenza del punto L e una a metà dell'asse  $\Gamma$ -X. Sapendo che in entrambe le valli  $m_l^* = 0.2 m_0$ ,  $m_t^* = 0.5 m_0$ , determinare la massa DOS per gli elettroni in banda di conduzione.



### Soluzione 7

Ricordando la definizione di massa DOS, occorre considerare il contributo simultaneo di entrambe le valli. Entrambe sono caratterizzate dalle stesse masse longitudinali e trasversali, dunque differiscono solo in termini di degenerazione:

$$m_{DOS}^{\frac{3}{2}} = g_L m_l^{*\frac{1}{2}} m_t^* + g_X m_l^{*\frac{1}{2}} m_t^* = (g_L + g_X) m_l^{*\frac{1}{2}} m_t^*$$

$$m_{DOS} = (g_L + g_X)^{\frac{2}{3}} m_l^{*\frac{1}{3}} m_t^{*\frac{2}{3}}$$

Considerando la natura tridimensionale del semiconduttore, si avranno 6 valli isoenergetiche  $\Gamma$ -X entro la prima zona di Brillouin ( $g_X = 6$ ). Diversamente, per le valli L, solo metà di ogni ellissoide rientra all'interno della prima zona di Brillouin ( $g_L = \frac{8}{2} = 4$ ). Pertanto:

$$m_{DOS} = (6 + 4)^{\frac{2}{3}} m_l^{*\frac{1}{3}} m_t^{*\frac{2}{3}} = 1.71 m_0$$

## Esercizio 8

Un campione in cesio ( $W_1 = 2.14 \text{ eV}$ ) di area  $A_1$  alla temperatura  $T_1 = 600 \text{ K}$  emette la stessa corrente termoionica  $I_1 = I_2$  di un campione in oro ( $W_2 = 5.1 \text{ eV}$ ) di area  $A_2 = 100A_1$  e temperatura  $T_2$ . Calcolare la funzione lavoro  $W_3$  di un terzo metallo avente temperatura  $T_3 = 2T_2$  e densità di corrente termoionica  $J_3$  pari a quella del cesio ( $J_3 = J_1$ ), facendo ragionevoli approssimazioni.

## Soluzione 8

Per i primi due campioni si può imporre l'uguaglianza tra le correnti per effetto termoionico:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_1 \cdot J_{th,1} = A_2 \cdot J_{th,2} = I_2 \\ A_1 \cdot \mathcal{A}_1 T_1^2 e^{-\frac{W_1}{kT_1}} &= A_2 \cdot \mathcal{A}_2 T_2^2 e^{-\frac{W_2}{kT_2}} \\ \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot e^{-\frac{W_1}{kT_1}} &= e^{-\frac{W_2}{kT_2}} \end{aligned}$$

Assumendo come ragionevole approssimazione  $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$  e trascurando la dipendenza quadratica, si ha quindi:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) - \frac{W_1}{kT_1} &= -\frac{W_2}{kT_2} \\ \frac{kT_1 \cdot \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) - W_1}{kT_1} &= -\frac{W_2}{kT_2} \\ T_2 &= -\frac{W_2 T_1}{kT_1 \cdot \ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right) - W_1} = 1286 \text{ K} \end{aligned}$$

La temperatura del terzo metallo è quindi:

$$T_3 = 2T_2 = 2573 \text{ K}$$

Imponendo l'uguaglianza tra le densità di corrente per il primo e il terzo metallo:

$$J_{th,1} = \mathcal{A}_1 T_1^2 e^{-\frac{W_1}{kT_1}} = \mathcal{A}_3 T_3^2 e^{-\frac{W_3}{kT_3}} = J_{th,3}$$

Posta come ragionevole approssimazione  $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_3$ , allora:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{T_1^2}{T_3^2}\right) - \frac{W_1}{kT_1} &= -\frac{W_3}{kT_3} \\ W_3 &= \frac{T_3}{T_1} W_1 - 2kT_3 \cdot \ln\left(\frac{T_1}{T_3}\right) = 9.8 \text{ eV} \end{aligned}$$

## Esercizio 9

Una barretta di silicio di lunghezza  $L = 500 \text{ nm}$  ( $\mu_n(300 \text{ K}) = 770 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ) è inizialmente drogata con atomi donori, ottenendo una concentrazione uniforme di drogante  $N_{D0} = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . La barretta subisce un ulteriore drogaggio, al termine del quale la concentrazione di drogante assume un profilo parabolico  $N_D(x) = N_{D0}(1+9x^2/L^2)$ . Tracciare un grafico quotato della densità di corrente di diffusione  $J_{diff}(x)$  e del campo elettrico  $F(x)$  nello spazio, riportando in particolare i valori  $J_{diff}(0)$ ,  $J_{diff}(L)$ ,  $F(0)$ ,  $F(L)$ , e il minimo valore di campo  $F_{min}$  lungo il dispositivo.

## Soluzione 9

La corrente di diffusione è data da:

$$J_{diff}(x) = qD_n \frac{\partial n(x)}{\partial x} \approx qD_n \frac{\partial N_D(x)}{\partial x} = q \cdot D_n \cdot \frac{9N_{D0}}{L^2} \cdot 2x = q \cdot D_n \cdot \frac{18N_{D0}}{L^2} \cdot x$$

Dove  $D_n = \frac{kT\mu_n}{q} = 20 \text{ cm}^2/\text{s}$ . In corrispondenza dei punti richiesti si ha quindi:

$$J_{diff}(0) = 0 \frac{\text{kA}}{\text{cm}^2} \qquad J_{diff}(L) = q \cdot D_n \cdot \frac{18N_{D0}}{L} = 11.5 \frac{\text{kA}}{\text{cm}^2}$$

Il campo è legato alla corrente di deriva, che deve garantire:

$$J = J_{diff} + J_{drift} = J_{diff}(x) + q\mu F(x)n(x) = 0$$

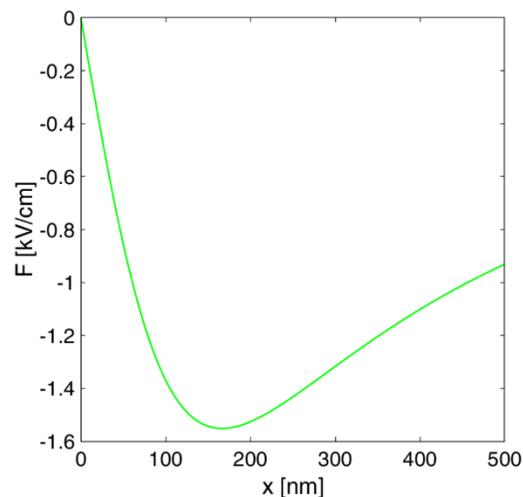
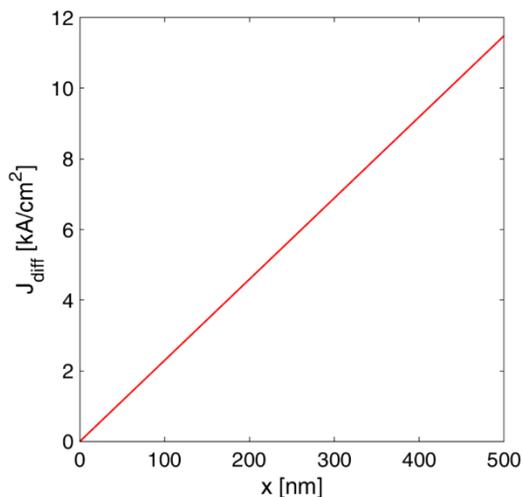
$$F(x) = -\frac{J_{diff}(x)}{q\mu n(x)} = -qD_n \frac{18N_{D0}}{L^2} x \cdot \frac{L^2}{q\mu \cdot N_{D0}(L^2 + 9x^2)} = -18 \frac{kT}{q} \cdot \frac{x}{L^2 + 9x^2}$$

Il minimo valore di campo si ha in corrispondenza di:

$$\frac{dF}{dx} = -18 \frac{kT}{q} \cdot \frac{L^2 + 9x^2 - 18x^2}{(L^2 + 9x^2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad L^2 - 9x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{min} = \frac{L}{3}$$

Nei punti richiesti si ha quindi:

$$F(0) = 0 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \qquad F(L) = -0.93 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \qquad F\left(\frac{L}{3}\right) = -1.55 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$



## Esercizio 10

Si consideri una barretta di silicio ( $L = 600 \mu\text{m}$ ,  $\tau_p = 100 \text{ ns}$ ,  $\mu_p = 400 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ) drogata n, con  $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . La barretta viene irraggiata creando un eccesso di portatori minoritari in  $x = 0$  pari a  $\delta p(0) = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  che viene mantenuto per ogni istante di tempo successivo. Determinare gli andamenti dei quasi livelli di Fermi  $F_n$  e  $F_p$  e riportarli in un grafico quotato.

## Soluzione 10

La concentrazione dei minoritari decresce nello spazio seguendo un decadimento esponenziale per effetto della ricombinazione:

$$p(x) = p_0 + \delta p_0 e^{-\frac{x}{L_p}} \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = 10.17 \mu\text{m}$$

In condizioni di disequilibrio la concentrazione di lacune in un generico punto  $x$  è descritta da:

$$p(x) = N_V e^{-\frac{F_p(x) - E_V}{kT}}$$

Dividendo lo spazio in due regioni, una tra  $0 < x < \bar{x}$  in cui  $p(x) \simeq \delta p(x)$ , e una per  $x > \bar{x}$  in cui  $p(x) \simeq p_0$ , allora nel primo caso:

$$\delta p_0 e^{-\frac{x}{L_p}} \simeq N_V e^{-\frac{F_p(x) - E_V}{kT}} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{\delta p_0}{N_V}\right) - \frac{x}{L_p} \simeq \frac{E_V - F_p(x)}{kT}$$

$$F_p(x) \simeq E_V - kT \cdot \ln\left(\frac{\delta p_0}{N_V}\right) + kT \cdot \frac{x}{L_p}$$

Nel secondo caso, invece:

$$F_p(x) \simeq E_V - kT \cdot \ln\left(\frac{p_0}{N_V}\right) = E_F = E_V + 1 \text{ eV}$$

Il crossover fra i due regimi si ha circa in corrispondenza di:

$$\bar{x} := \delta p(x) \simeq p_0 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = -L_p \ln\left(\frac{p_0}{\delta p_0}\right) = 297 \mu\text{m}$$

Poiché  $\delta p(0) \ll N_D$ , la concentrazione di elettroni è invece approssimabile alla concentrazione del drogante (debole iniezione), e dunque circa costante:

$$n(x) \simeq N_D = N_C e^{-\frac{E_C - F_n(x)}{kT}}$$

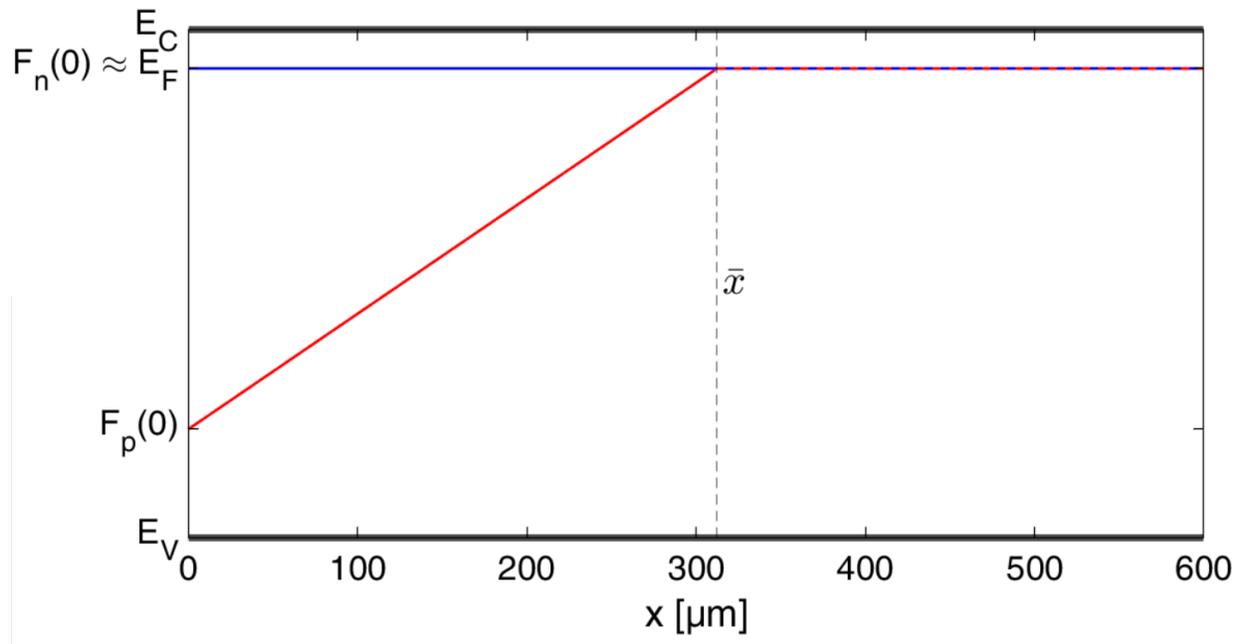
$$F_n(x) = E_C + kT \ln\left(\frac{N_D}{N_C}\right) \simeq E_F$$

Individuando quindi come punti caratteristici:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad F_p(0) = E_V - kT \ln\left(\frac{p_0}{N_V}\right) = E_V + 239 \text{ meV} \quad F_n(0) \simeq E_C + kT \ln\left(\frac{N_D}{N_C}\right) = E_C - 86 \text{ meV}$$

$$x = \bar{x} \quad \rightarrow \quad F_p(\bar{x}) \simeq F_n(\bar{x}) = E_F = E_C - 86 \text{ meV}$$

Si può quindi tracciare il grafico quotato:



Dove quindi