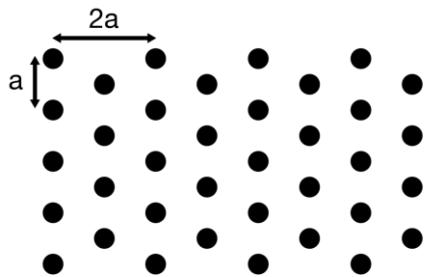


08/01/2026 – Appello 4

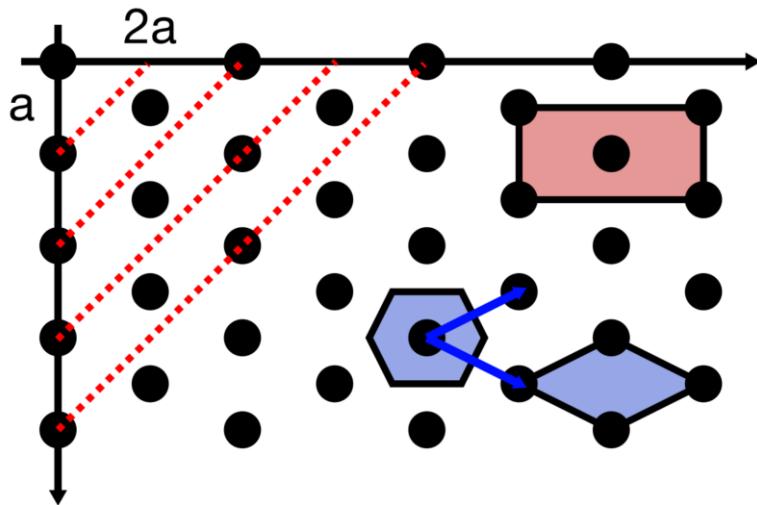
Esercizio 1

Si consideri il reticolo in **Fig. 1**, dove $a = 1 \text{ nm}$. Si identifichi il tipo di reticolo, indicando una coppia di vettori primitivi, una cella primitiva e calcolando la densità atomica superficiale. Determinare quindi la tensione di accelerazione minima necessaria per osservare almeno un picco di diffrazione dai piani $\{110\}$ in un setup di diffrazione elettronica.



Soluzione 1

Si tratta di un reticolo rettangolare centrato. Esempi di celle primitive sono la cella di Wigner-Seitz e la cella rombica in figura (colore blu), che contengono esattamente 1 atomo per cella.



Non è invece una cella primitiva la cella rettangolare (rossa), poiché contiene al suo interno più di un atomo (nello specifico, 1 atomo centrale più 4 atomi ciascuno condiviso fra 4 celle, per un totale di 2 atomi). Ai fini del calcolo della densità atomica superficiale, le tre celle sono invece equivalenti e restituiscono tutte lo stesso valore. Presa per comodità la cella rettangolare, si ha quindi:

$$\rho_{at} = \frac{N_{at/cell}}{A_{cell}} = \frac{1 + 4 \cdot \frac{1}{4}}{2a^2} = \frac{2}{2a^2} = \frac{1}{a^2} = 1 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$$

Per determinare la minima energia di un fascio di raggi X che permetta di osservare diffrazione dai piani {110}, ricordiamo la legge di diffrazione di Bragg:

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

La distanza interplanare per i piani {110} si può ricavare da considerazioni geometriche, essendo pari a metà della diagonale del quadrato di lato 2a:

$$d_{110} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2} = 1.41 \text{ nm}$$

Ricordando che per un fascio elettronico l'energia e la lunghezza d'onda sono inversamente proporzionali:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

La minima energia corrisponde alla massima lunghezza d'onda. Massimizzando pertanto la relazione di Bragg:

$$\lambda_{max} = \max\left(\frac{2d_{110} \sin \theta}{n}\right) = (\min(n) = 1, \max(\sin \theta = 1)) = 2d_{110} = 2.82 \text{ nm}$$

Da cui l'energia minima:

$$E_{min} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 0.19 \text{ eV}$$

Corrispondente quindi a una tensione di accelerazione:

$$V_{min} = \frac{E_{min}}{q} = 0.19 \text{ V}$$

Esercizio 2

In un setup di esperimento fotoelettrico in assenza di tensione applicata ($V_A = 0$ V), gli elettroni fotogenerati incidono sull'anodo ad una velocità $v_a = 10^6$ m/s. Nota la funzione lavoro del catodo $W = 4$ eV, calcolare la lunghezza d'onda λ della radiazione incidente e la tensione V_{stop} al di sotto della quale non si osserva effetto fotoelettrico.

Soluzione 2

In assenza di tensione applicata, l'energia cinetica per gli elettroni all'anodo è pari a:

$$E_{k,a} = E_{ph} - W + qV_A = E_{ph} - W = \frac{1}{2}m_e v_a^2$$

Nota la velocità degli elettroni all'anodo, è possibile ricavare l'energia della radiazione entrante:

$$E_{ph} = W + \frac{1}{2}m_e v_a^2 = 6.84 \text{ eV}$$

A cui corrisponde quindi una lunghezza d'onda:

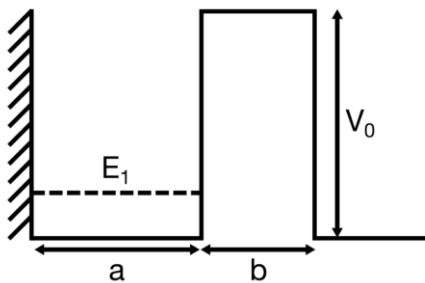
$$\lambda_{ph} = \frac{hc}{E_{ph}} = 181.5 \text{ nm}$$

Affinché non si osservi effetto fotoelettrico, il setup deve essere polarizzato in modo da annullare l'energia cinetica dei portatori all'anodo:

$$E_{k,a} = E_{ph} - W + qV_A = 0 \rightarrow V_A = -\frac{E_{ph} - W}{q} = -2.84 \text{ V}$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema buca-barriera in **Fig. 2**, dove $a = 1 \text{ nm}$, $b = 2 \text{ nm}$, $V_0 = 5 \text{ eV}$. Usando l'approssimazione di buca a pareti infinite al solo fine del calcolo degli autostati della buca, si determini il campo F da applicare alla barriera affinché il tempo medio di tunneling per un elettrone sul primo livello confinato E_1 sia $t_{\text{TUN}} = 10 \text{ ns}$. Commentare qualitativamente come cambierebbe il risultato ottenuto se si considerasse l'altezza finita della barriera nel calcolo dell'autostato.



Soluzione 3

In approssimazione di buca a pareti infinite, il primo autostato è localizzato a:

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8ma^2} = 0.377 \text{ eV}$$

Il tempo medio di tunneling attraverso la barriera b è dato da:

$$t_{\text{TUN}} = \frac{t_{\text{AR}}}{P_T}$$

Dove il tempo di andata/ritorno è:

$$t_{\text{AR}} = \frac{2a}{v} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{2E_1}{m}}} = 5.5 \text{ fs}$$

Affinché il tempo medio di tunneling sia 10 ns, deve quindi essere:

$$P_T = \frac{t_{\text{AR}}}{t_{\text{TUN}}} = 5.5 \cdot 10^{-7}$$

In assenza di campo applicato e in approssimazione WKB, la probabilità di tunneling attraverso la barriera è pari a:

$$P_{T,0} = e^{-2ab} = e^{-2\frac{\sqrt{2m_e(V_0-E_1)}}{\hbar}b} = 7.7 \cdot 10^{-20}$$

Che non è quindi sufficiente a garantire il tempo medio di tunneling richiesto. Considerando adesso un campo applicato non nullo, il sistema potrebbe trovarsi in condizioni di tunneling Fowler-Nordheim o tunneling diretto. Supponendo che il sistema si trovi in tunneling Fowler-Nordheim,

$$P_T = e^{-\frac{4\sqrt{2m_e}}{3q\hbar F}(V_0-E_1)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow F = -\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m_e}}{q\hbar \log P_T}(V_0-E_1)^{\frac{3}{2}} = 4.7 \frac{V}{nm}$$

Per validare il risultato, occorre verificare l'ipotesi Fowler-Nordheim:

$$V_0 - qFb \leq E_1 \rightarrow 5 \text{ eV} - 4.7 \frac{eV}{nm} \cdot 2 \text{ nm} = -4.41 \text{ eV} \leq 0.377 \text{ eV}$$

L'ipotesi è quindi verificata, pertanto $F = 4.7 \text{ V/nm}$ è il campo richiesto.

Qualitativamente, se si considerasse la finitezza della barriera, l'autostato E_1 si localizzerebbe ad energie inferiori, risultando in (i) un incremento del tempo di andata-ritorno (minore energia cinetica) e (ii) una maggiore altezza di barriera:

$$F = -\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m_e}}{q\hbar \log P_T}(V_0-E_1)^{\frac{3}{2}} \propto \frac{(V_0-E_1)^{\frac{3}{2}}}{\log(E_1)}$$

Considerando quindi:

$$E'_1 < E_1 \leftrightarrow \log(E'_1) < \log(E_1) \leftrightarrow (V_0-E'_1)^{\frac{3}{2}} > (V_0-E_1)^{\frac{3}{2}}$$

Il campo atteso sarà:

$$\frac{F'}{F} = \frac{\log(E_1)}{\log(E'_1)} \cdot \frac{(V_0-E'_1)^{\frac{3}{2}}}{(V_0-E_1)^{\frac{3}{2}}} > 1 \rightarrow F' > F$$

(Valutando numericamente si ottiene: $E'_1 = 0.317 \text{ eV}$, $F' = 4.85 \frac{V}{nm}$).

Esercizio 4

Si consideri un oscillatore armonico $V(x) = \frac{1}{2} \alpha x^2$, con $\alpha = 2 \text{ eV/nm}^2$, e uno stato Ψ ottenuto come sovrapposizione paritaria del primo e terzo autostato, $\Psi = 2^{-0.5}(\Psi_1 + \Psi_3)$. Calcolare la frequenza di oscillazione ω_{13} dello stato non-stazionario Ψ e tracciare qualitativamente il modulo quadro dell'autofunzione $|\Psi|^2$ ai tempi $t = 0$, $t = \pi/2\omega_{13}$, $t = \pi/\omega_{13}$, $t = 3\pi/2\omega_{13}$.

Soluzione 4

Gli autostati dell'oscillatore armonico sono descritti da:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

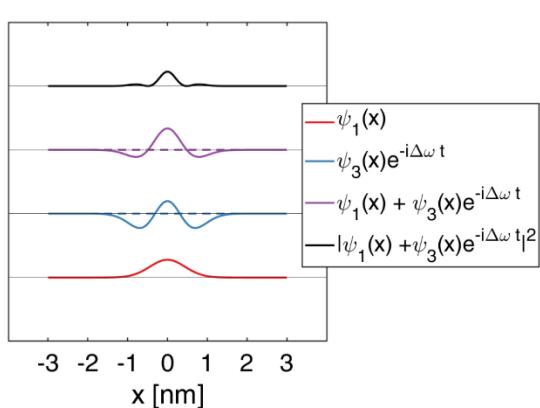
Dove $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m_e}} = 593 \text{ Trad/s}$. Considerando lo stato Ψ ottenuto come sovrapposizione del primo e terzo autostato, si può scrivere:

$$\Psi = a(\Psi_1(x, t) + \Psi_3(x, t)) = a(\psi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + \psi_3(x)e^{-i\omega_3 t}) = ae^{-i\omega_1 t}(\psi_1(x) + \psi_3 e^{-i(\omega_3 - \omega_1)t})$$

Il cui modulo quadro è quindi dato da:

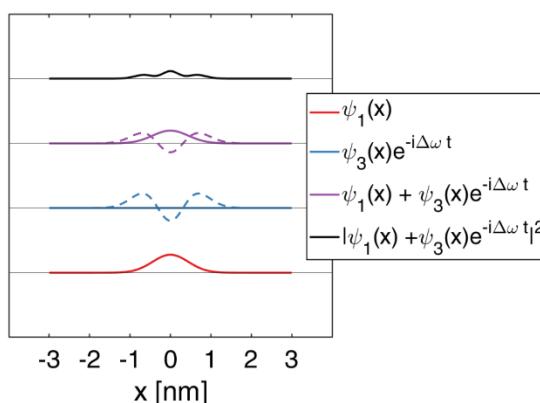
$$|\Psi|^2 = |a|^2 |\psi_1(x) + \psi_3(x)e^{-i\Delta\omega t}|^2$$

Dove $\Delta\omega = \omega_3 - \omega_1 = 1.18 \cdot 10^{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 2\pi \cdot 189 \text{ THz}$. Le autofunzioni ψ_1 e ψ_3 presentano, rispettivamente, un lobo e tre lobi. Ai tempi richiesti:



$$|\Psi|^2(0) = \frac{1}{2} |\psi_1 + \psi_3|^2$$

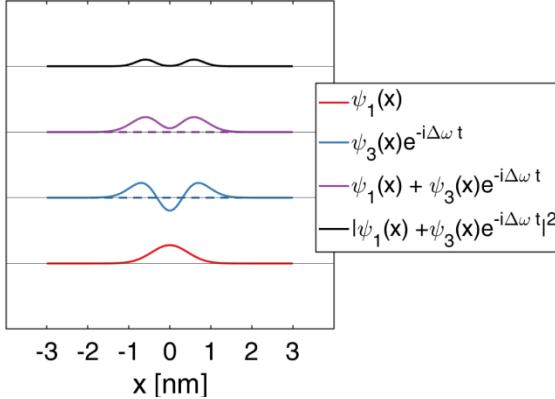
Al tempo $t = 0$, i lobi centrali si sommano. I lobi laterali di ψ_3 interagiscono debolmente con le code di ψ_1 , creando dei piccoli lobi secondari in corrispondenza delle regioni periferiche della buca.



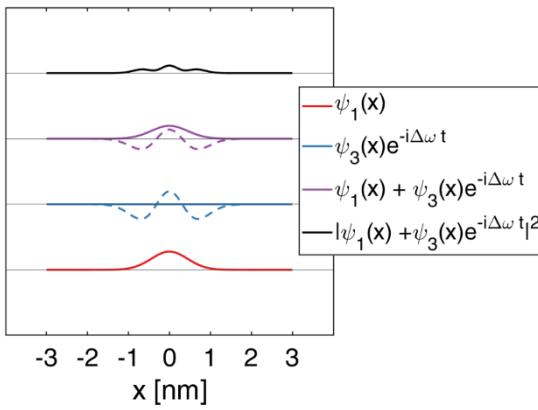
$$|\Psi|^2 \left(\frac{\pi}{2\Delta\omega} \right) = \frac{1}{2} |\psi_1 + \psi_3 e^{-\frac{\pi}{2}}|^2 = \\ = \frac{1}{2} |\psi_1 - i\psi_3|^2 = \frac{1}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2)$$

Al tempo $t = \frac{\pi}{2\Delta\omega}$, le autofunzioni si sommano in modulo quadro. I lobi secondari sono più evidenti del caso $t = 0$, mentre diminuisce l'ampiezza del lobo centrale (la massa di probabilità si sposta progressivamente verso i lobi secondari).

$$|\Psi|^2 \left(\frac{\pi}{\Delta\omega} \right) = \frac{1}{2} |\psi_1 - \psi_3|^2$$



Al tempo $t = \frac{\pi}{\Delta\omega}$, le autofunzioni interferiscono distruttivamente. In particolare, il lobo centrale di ψ_3 ha adesso segno negativo, mentre i lobi secondari interagiscono costruttivamente con le code di ψ_1 . Il risultato è uno svuotamento della regione intorno a $x = 0$ in favore di un incremento della probabilità di localizzare la particella nelle parti periferiche della buca.



$$|\Psi|^2 \left(\frac{3\pi}{2\Delta\omega} \right) = \frac{1}{2} \left| \psi_1 + \psi_3 e^{-\frac{3\pi}{2}} \right|^2 = \\ = \frac{1}{2} |\psi_1 + i\psi_3|^2 = \frac{1}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2)$$

Al tempo $t = \frac{3\pi}{2\Delta\omega}$, le autofunzioni si sommano nuovamente in modulo quadro. Il risultato netto è il medesimo del caso $t = \frac{\pi}{2\Delta\omega}$, dove adesso la massa di probabilità sta progressivamente tornando verso il centro della buca.

Esercizio 5

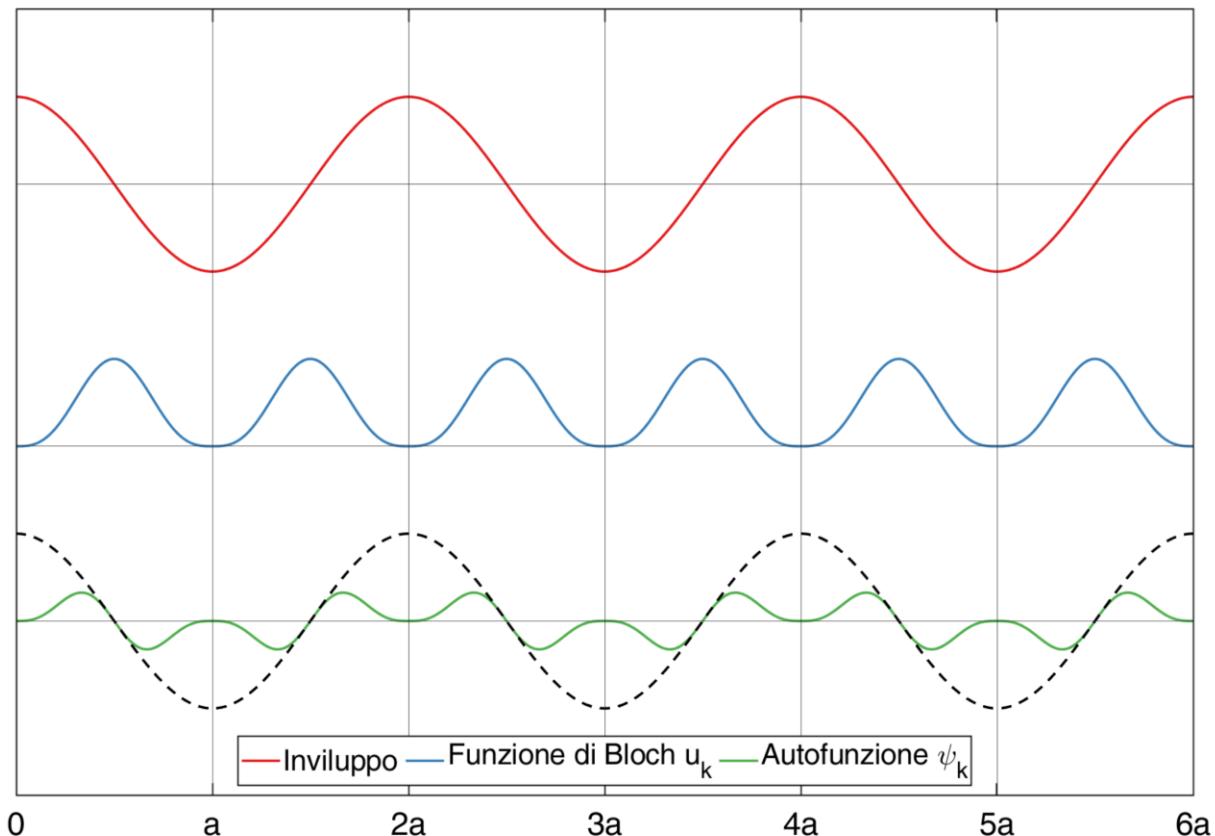
Un elettrone in un cristallo di passo $a = 3 \text{ nm}$ è descritto da un'autofunzione $\Psi_k(x) = u_k(x)e^{ikx}$. Sapendo che l'autofunzione torna in fase dopo 2 passi reticolari, determinare il valore del vettore d'onda cristallino k . Tracciare quindi il profilo della parte reale dell'autofunzione su 6 passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

Soluzione 5

Sapendo che l'autofunzione torna in fase dopo 2 passi reticolari:

$$e^{ik \cdot 2a} = e^{i2\pi} \rightarrow k = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a} = 1.047 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Il grafico su 6 passi reticolari è quindi:



Esercizio 6

Un semiconduttore 3D è descritto da una struttura a bande comprendente due bande di valenza ($m_{LH}^* = 0.2m_0$, $m_{HH}^* = 0.8m_0$), entrambe con apice in $k = 0$, e una banda di conduzione con minimo isotropo nel punto Γ ($m_\Gamma^* = 0.3m_0$). Determinare la massa DOS e di conduzione per lacune ed elettroni.

Soluzione 6

Per la banda di conduzione, essendo il minimo singolo e isotropo, la massa DOS e la massa di conduzione coincidono con la massa efficace nel punto Γ :

$$m_{DOS,n}^* = m_{c,n}^* = m_\Gamma^* = 0.3 m_0$$

Per la banda di valenza, occorre considerare il contributo di entrambe le bande. Per la massa DOS:

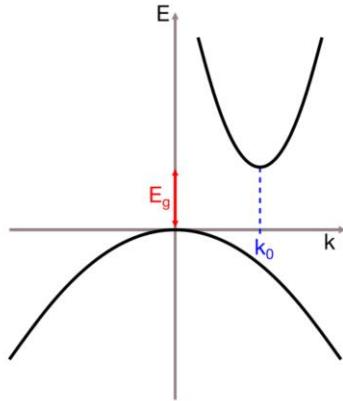
$$m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}} = m_{HH}^{\frac{3}{2}} + m_{LH}^{\frac{3}{2}} \rightarrow m_{DOS,p}^* = \left(m_{HH}^{\frac{3}{2}} + m_{LH}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.865 m_0$$

Per la massa di conduzione, occorre pesare il contributo di ciascuna banda rispetto alla densità di stati:

$$\frac{1}{m_{c,p}^*} = \frac{\left(\frac{m_{LH}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}}} \right)}{m_{LH}^*} + \frac{\left(\frac{m_{HH}^{\frac{3}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}}} \right)}{m_{HH}^*} = \frac{m_{LH}^{\frac{1}{2}} + m_{HH}^{\frac{1}{2}}}{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}}} \rightarrow m_{c,p}^* = \frac{m_{DOS,p}^{\frac{3}{2}}}{m_{LH}^{\frac{1}{2}} + m_{HH}^{\frac{1}{2}}} = 0.6 m_0$$

Esercizio 7

Si consideri il materiale a gap indiretto in **Fig. 3**, dove $E_g = 1 \text{ eV}$, $k_0 = 2 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$, $m_{BC}^* = 0.2m_0$ e $m_{BV}^* = 0.6m_0$. Determinare la minima energia di un fotone che possa essere assorbito in un processo a due particelle, e le velocità dell'elettrone e della lacuna appena dopo l'assorbimento del fotone.



Soluzione 7

Le bande possono essere descritte in approssimazione parabolica come:

$$E_V(k) = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$

$$E_C(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_{BC}^*}$$

In un processo a due particelle, il momento k dell'elettrone deve conservarsi. Consideriamo pertanto il gap in funzione di k :

$$E_g(k) = E_g + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m_{BC}^*} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$

Il testo richiede di determinare il k per la transizione a minima energia. Derivando si ottiene:

$$\frac{dE_g}{dk} = \frac{\hbar^2(k - k_0)}{m_{BC}^*} + \frac{\hbar^2 k}{m_{BV}^*} = 0$$

$$k \left(\frac{1}{m_{BC}^*} + \frac{1}{m_{BV}^*} \right) = \frac{k_0}{m_{BC}^*} \quad \rightarrow \quad \bar{k} = k_0 \frac{m_{BV}^*}{m_{BC}^* + m_{BV}^*} = 1.5 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

A cui corrisponde un'energia:

$$E_{ph} = E_g(\bar{k}) = E_g + \frac{\hbar^2(\bar{k} - k_0)^2}{2m_{BC}^*} + \frac{\hbar^2 \bar{k}^2}{2m_{BV}^*} = 1.191 \text{ eV}$$

Le velocità dell'elettrone e della lacuna sono date dalle rispettive velocità di gruppo:

$$v_e = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_C}{\partial k} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{\hbar(\bar{k} - k_0)}{m_{BC}^*} = -2.897 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Per la lacuna, occorre tenere conto del segno negativo, essendo la velocità a cui viaggia la vacanza di elettroni:

$$v_h = -\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_V}{\partial k} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{\hbar \bar{k}}{m_{BV}^*} = 2.897 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Esercizio 8

Un campione di cesio ($W_1 = 2.14 \text{ eV}$) alla temperatura $T_1 = 600 \text{ K}$ emette la stessa densità di corrente termoionica di un secondo campione di materiale ignoto alla temperatura $T_2 = 900 \text{ K}$. Dopo aver determinato la funzione lavoro W_2 del secondo materiale, si tracci il grafico di Arrhenius ($\log(J)$ vs $1/kT$) per la densità di corrente J per i due materiali, facendo ragionevoli approssimazioni.

Soluzione 8

Ricordando la legge di Richardson-Laue-Dushman:

$$J_{th} = AT^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

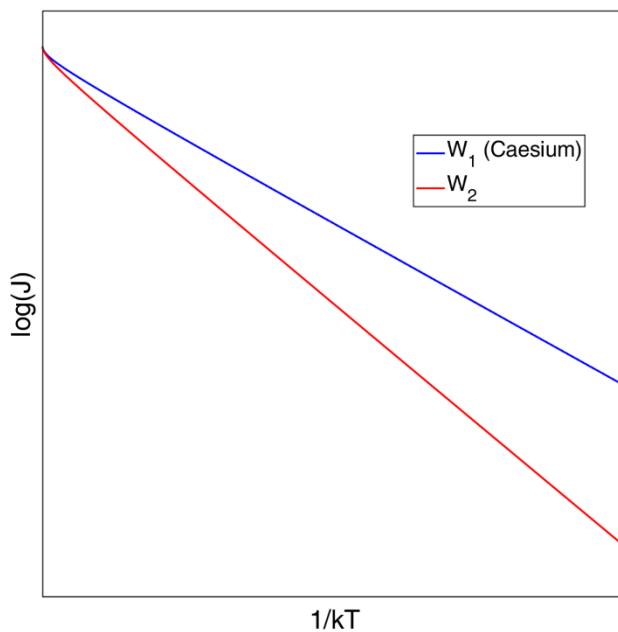
Come ragionevoli approssimazioni, si considerano $A_1 \approx A_2$ e si trascura la dipendenza quadratica dalla temperatura. Allora:

$$\frac{J_2}{J_1} = e^{-\left(\frac{W_1}{kT_1} - \frac{W_2}{kT_2}\right)} = 1 \rightarrow \frac{W_1}{T_1} = \frac{W_2}{T_2} \rightarrow W_2 = \frac{T_2}{T_1} W_1 = 3.21 \text{ eV}$$

Nel grafico di Arrhenius la coordinata $x = 1/kT$, mentre la coordinata $y = \log(J)$. Pertanto:

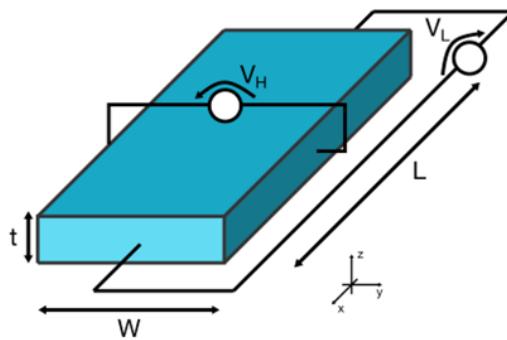
$$y = \log(J) = \log(AT^2) - \frac{W}{kT} = \log\left(\frac{A}{k^2}\right) + 2\log(kT) - \frac{W}{kT} = \alpha - 2\log(x) - Wx$$

In entrambi i casi il grafico di Arrhenius è approssimabile a una retta con pendenza $-W$; essendo $W_2 > W_1$, la pendenza del grafico per il secondo materiale sarà maggiore della pendenza del grafico per il cesio.



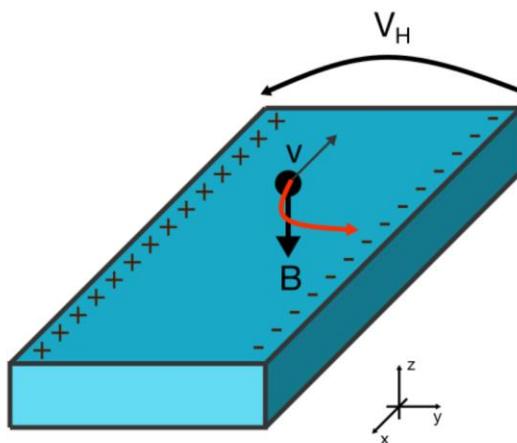
Esercizio 9

Si consideri il campione di silicio drogato n sottoposto ad esperimento di effetto Hall in **Fig. 4** ($N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $t = 15 \text{ nm}$, $L = 10W = 10 \mu\text{m}$, $\mu_n = 1000 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$, $V_L = 2 \text{ V}$). Nota $V_H = 20 \text{ mV}$ con verso indicato in figura, determinare modulo e verso del campo magnetico B e della corrente I attraverso il dispositivo.



Soluzione 9

La corrente fluisce in direzione x_+ . Il materiale è drogato n, pertanto i portatori maggioritari sono elettroni che fluiscono in direzione x_- . La tensione di Hall è orientata in direzione y_- , corrispondente a un accumulo di elettroni in direzione y_+ , a cui corrisponde un eccesso di carica positiva all'equilibrio in direzione y_- . Perché la forza di Lorentz agisca in direzione y_- , il campo magnetico deve essere orientato in direzione z_- :



Il modulo si può ricavare imponendo il bilancio tra la forza di Lorentz e la forza di Coulomb:

$$|\mathcal{F}_L| = qvB = qF_T = |\mathcal{F}_C|$$

$$q\mu F_L B = qF_T$$

$$B = \frac{V_H}{V_L} \cdot \frac{L}{W} \cdot \frac{1}{\mu} = 1 \text{ T}$$

La corrente si ricava invece dalla legge di Ohm, ricordando:

$$I = GV_L = \sigma \frac{Wt}{L} V_L$$

Dove la conducibilità è data da:

$$\sigma = qp\mu_p + qn\mu_n \simeq qN_D\mu_n$$

Allora:

$$I = qN_D\mu_n \cdot \frac{Wt}{L} \cdot V_L = 48 \mu A$$

Esercizio 10

Si consideri una barretta di silicio (drogaggio n, $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, tempo di ricombinazione dei minoritari $\tau_p = 100 \text{ ns}$) dove un fascio laser impone una concentrazione in eccesso di portatori minoritari in superficie pari a $\delta p(0) = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Nota la mobilità delle lacune $\mu_p = 400 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$, determinare la distanza x_{fe} dalla superficie oltre la quale il semiconduttore si può considerare all'equilibrio termodinamico.

Soluzione 10

La concentrazione di minoritari in eccesso decade esponenzialmente lungo lo spazio per effetto dei fenomeni di ricombinazione come:

$$\delta p(x) = \delta p(0) e^{-\frac{x}{L_p}}$$

Dove la lunghezza di diffusione per le lacune è pari a:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} = \sqrt{\frac{kT}{q} \mu_p \tau_p} = 10.176 \mu\text{m}$$

Come punto di confine fra la condizione di fuori equilibrio e la condizione di equilibrio termodinamico, si può considerare la distanza x_{fe} in cui l'eccesso di portatori egualia la concentrazione di lacune all'equilibrio p_0 :

$$\delta p(x_{fe}) = \delta p(0) e^{-\frac{x_{fe}}{L_p}} = p_0 = \frac{n_i^2}{N_D} = 210.25 \text{ cm}^{-3}$$

Da cui si ottiene:

$$x_{fe} = L_p \cdot \log\left(\frac{\delta p(0)}{p_0}\right) = 297 \mu\text{m}$$