

1. Si consideri la struttura cristallina mostrata in **Fig. 1**. È un reticolo di Bravais? In caso negativo, identificare una combinazione base-reticolo. Noto $a = 1 \text{ nm}$, calcolare la densità atomica superficiale.
2. Si consideri un cristallo cubico semplice di passo $a = 1 \text{ nm}$ sottoposto ad esperimento di diffrazione con una sorgente a raggi X. Determinare la minima energia E_{\min} della sorgente per osservare almeno un picco di diffrazione dai piani $\{111\}$. Se si sostituisse la sorgente a raggi X con un fascio di elettroni accelerati, quale sarebbe la tensione di accelerazione V_A necessaria per ottenere lo stesso spettro di diffrazione?
3. Due corpi neri di raggi r_1 e r_2 con $r_1 = 2r_2$ emettono la stessa potenza d'irraggiamento P . Determinare il rapporto λ_2/λ_1 fra le lunghezze d'onda corrispondenti al massimo dei rispettivi spettri di emissione.
4. Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico con catodo in oro ($W = 5.1 \text{ eV}$) e sorgente ultravioletta ($\lambda = 200 \text{ nm}$). Si calcolino (i) la tensione di stopping V_{stop} e (ii) la velocità dell'elettrone all'anodo quando viene applicata una tensione $V_A = 1 \text{ V}$.
5. Si consideri la buca a pareti infinite di larghezza $a = 1 \text{ nm}$ in **Fig. 2**, e sia $\Psi(x, t)$ lo stato non stazionario ottenuto dalla sovrapposizione delle funzioni d'onda dei primi tre livelli energetici come $\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos(k_1 x) e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}} \sin(k_2 x) e^{-i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}} \cos(k_3 x) e^{-i\omega_3 t}$. Dopo aver verificato la normalizzazione dello stato non stazionario, determinare il valore d'aspettazione dell'energia $\langle E \rangle$ e il valore energetico \bar{E} più probabile a valle di una misura.
6. Si consideri un elettrone incidente sul gradino di potenziale in **Fig. 3**, dove $V_0 = 2 \text{ eV}$ ed $E < V_0$. Sapendo che ad una distanza $x_d = 1 \text{ nm}$ dal gradino il modulo quadro della funzione d'onda $|\psi(x_d)|^2$ è pari al 10% del valore a $x = 0$, calcolare l'energia E dell'elettrone. Si scriva quindi la funzione d'onda $\Psi(x, t)$, calcolandone esplicitamente tutti i parametri caratteristici che vi compaiono. (*Suggerimento: considerare un'ampiezza arbitraria A per l'onda incidente in $x < 0$*)
7. Si consideri il sistema buca-barriera in **Fig. 4**, dove $a = 1 \text{ nm}$ e $V_0 = 5 \text{ eV}$. Dopo aver stimato la posizione dei livelli energetici della buca mediante il principio di indeterminazione di Heisenberg, si calcoli il tempo medio di tunneling per un elettrone sul primo livello energetico.
8. Si considerino due buche rettangolari aventi la medesima larghezza a , accoppiate a mezzo di una barriera delforme di modulo $u_0 = 1 \text{ eV} \cdot \text{nm}$. Sapendo che il terzo autostato pari è localizzato ad un'energia $E = 1 \text{ eV}$, determinare la frequenza di oscillazione ν dello stato non stazionario associato al terzo doppietto. Si disegni quindi in maniera qualitativa il modulo quadro della funzione d'onda del terzo doppietto $|\Psi_{56}|^2$ al tempo $t = \frac{1}{4\nu}$, sapendo che al tempo $t = 0$ la particella è localizzata interamente nella buca di destra.
9. Si consideri un pacchetto d'onde gaussiano centrato in $k_0 = 10^9 \text{ m}^{-1}$, propagantesi in un materiale caratterizzato da una relazione di dispersione $E(k) = E_0(1 + \cos(ka))$, con $a = 0.1 \text{ nm}$, $E_0 = 1 \text{ eV}$. Sapendo che al tempo $t = 100 \text{ ps}$ la dispersione spaziale del pacchetto è pari al doppio della dispersione iniziale ($t = 0$), determinare la deviazione standard σ_k del peso gaussiano.
10. Un elettrone in un cristallo di passo reticolare $a = 1 \text{ nm}$ è descritto da un'autofunzione $\psi_k(x)$ con $k = 3.14 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$. Dopo aver stimato il numero di passi reticolari N affinché l'autofunzione torni in fase, si disegni il profilo della parte reale della funzione involuppo e dell'autofunzione su $2N$ passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

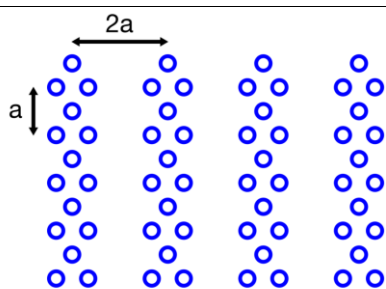


Fig. 1

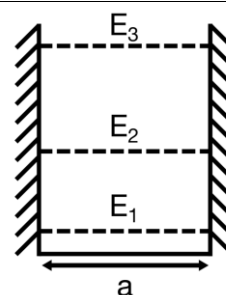


Fig. 2

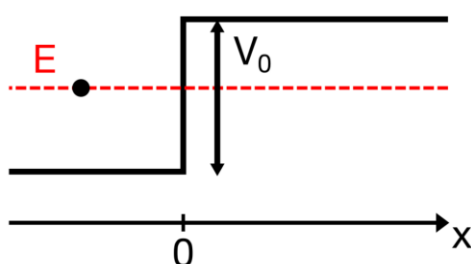


Fig. 3

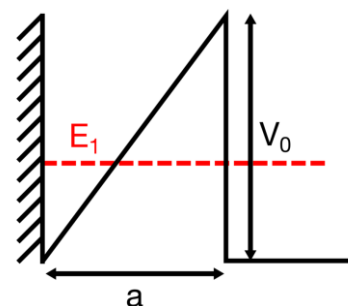


Fig. 4

1. Consider the crystalline structure in **Fig. 1**. Is it a Bravais lattice? If not, identify a suitable base-lattice combination. Given $a = 1$ nm, calculate the surface atomic density.
2. Consider a simple cubic crystal with lattice step $a = 1$ nm undergoing a diffraction experiment with an X-ray source. Determine the minimum energy E_{\min} of the source to observe at least one diffraction peak from $\{111\}$ planes. If the X-ray source were replaced by an accelerated electron beam, what would be the value of the acceleration voltage V_A to obtain the same diffraction spectrum?
3. Two black bodies with radii r_1 and r_2 with $r_1 = 2r_2$ emit the same irradiation power P . Determine the ratio λ_2/λ_1 between the wavelengths of the maxima of their emission spectra.
4. Consider a photoelectric experiment setup with gold cathode ($W = 5.1$ eV) and ultraviolet source ($\lambda = 200$ nm). Calculate (i) the stopping voltage V_{stop} and (ii) the electron velocity at the anode for an applied voltage $V_A = 1$ V.
5. Consider the infinite-wall quantum well with width $a = 1$ nm in **Fig. 2**, and let $\Psi(x, t)$ be the non-stationary state obtained by the superposition of the wavefunctions of the first three energy levels as $\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos(k_1 x) e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}} \sin(k_2 x) e^{-i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}} \cos(k_3 x) e^{-i\omega_3 t}$. After having verified the normalization of the non-stationary state, determine the expectation value of the energy $\langle E \rangle$ and the most probable value \bar{E} obtained from a measurement.
6. Consider an electron incident on the potential step in **Fig. 3**, where $V_0 = 2$ eV and $E < V_0$. Knowing that at a distance $x_d = 1$ nm from the step the modulus squared of the wavefunction $|\psi(x_d)|^2$ is equal to 10% of the value at $x = 0$, calculate the energy E of the electron. Then, write the wavefunction $\Psi(x, t)$ of the particle, explicitly calculating all the contained parameters. (*Hint: consider an arbitrary amplitude A for the incident wave at $x < 0$*).
7. Consider the well-barrier system in **Fig. 4**, where $a = 1$ nm and $V_0 = 5$ eV. After having estimated the position of the energy levels of the well using Heisenberg's indetermination principle, calculate the mean tunneling time for an electron on the first energy level.
8. Consider two rectangular wells with the same width a , coupled through a delta-like barrier with modulus $u_0 = 1$ eV·nm. Knowing that the third even eigenstate is localized at an energy $E = 1$ eV, determine the oscillation frequency ν of the non-stationary state associated with the third doublet. Then, draw a qualitative plot of the modulus squared of the third doublet wavefunction $|\Psi_{56}|^2$ at time $t = \frac{1}{4\nu}$, knowing that at time $t = 0$ the particle is entirely localized in the right-side well.
9. Consider a Gaussian wavepacket centered in $k_0 = 10^9$ m⁻¹, propagating in a material characterized by a dispersion relation $E(k) = E_0(1 + \cos(ka))$, with $a = 0.1$ nm, $E_0 = 1$ eV. Knowing that at time $t = 100$ ps the spatial dispersion of the wavepacket is twice the initial dispersion ($t = 0$), calculate the standard deviation σ_k of the Gaussian weight.
10. An electron in a crystal with lattice step $a = 1$ nm is described by an eigenfunction $\psi_k(x)$ where $k = 3.14 \cdot 10^9$ m⁻¹. After having estimated the number N of lattice steps for the eigenfunction to undergo a full phase cycle, plot the real part of the envelope function and of the eigenfunction on $2N$ lattice steps, knowing that the Bloch function is even with one maximum in correspondence of the atom.

Costanti fisiche:

massa dell'elettrone
 costante di Planck
 carica elettronica
 costante di Boltzmann
 velocità della luce
 costante dielettrica nel vuoto
 costante di Stefan-Boltzmann
 costante di Wien

$m_0 = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg
 $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s
 $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C
 $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J K⁻¹
 $c = 2.998 \cdot 10^8$ m s⁻¹
 $\epsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12}$ F m⁻¹
 $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W m⁻² K⁻⁴
 $c_W = 2.8 \cdot 10^{-3}$ K m

costante dielettrica relativa ϵ_r
 concentrazione intrinseca n_i [cm⁻³]
 gap di energia E_G [eV]
 densità di stati effettiva in banda di conduzione N_C [cm⁻³]
 densità di stati effettiva in banda di valenza N_V [cm⁻³]

Si	Ge
11.7	16
1.45×10^{10}	2.4×10^{13}
1.12	0.66
2.8×10^{19}	1.04×10^{19}
1.04×10^{19}	0.6×10^{19}