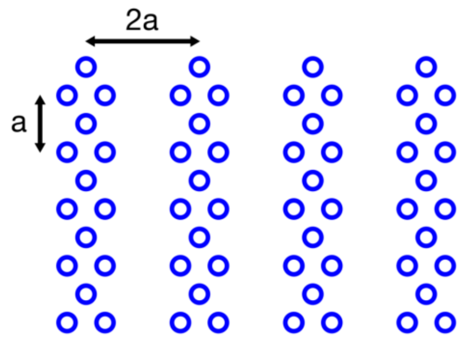
17/04/2026 – 1PI

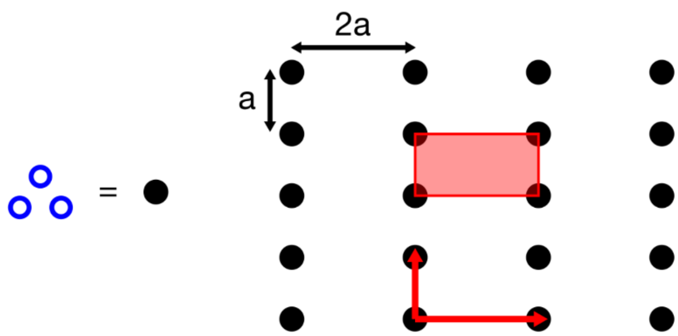
Esercizio 1

Si consideri la struttura cristallina mostrata in Fig. 1. È un reticolo di Bravais? In caso negativo, identificare una combinazione base-reticolo. Noto a = 1 nm, calcolare la densità atomica superficiale.



Soluzione 1

La struttura considerata non è un reticolo di Bravais. Individuando la base triatomica in figura, ci si può ricondurre ad un reticolo rettangolare di passi a e 2a:



Dove si sono evidenziate una cella primitiva e una coppia di vettori primitivi. La densità atomica superficiale è quindi pari a:

$$\rho_{at} = \frac{N_{at/cell}}{A_{cell}} = \frac{N_{basi/cell} \cdot N_{at/base}}{A_{cell}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3}{2a \cdot a} = \frac{3}{2a^2} = 1.5 \cdot 10^{14}\ cm^{-2}$$

Esercizio 2

Si consideri un cristallo cubico semplice di passo a = 1 nm sottoposto ad esperimento di diffrazione con una sorgente a raggi X. Determinare la minima energia E_{min} della sorgente per osservare diffrazione dai piani {111}. Se si sostituisse la sorgente a raggi X con un fascio di elettroni accelerati, quale sarebbe la tensione di accelerazione V_A necessaria per realizzare la medesima condizione operativa?

Soluzione 2

Per osservare diffrazione di Bragg, deve essere verificata la condizione:

$$n\lambda = 2d \sin\theta$$

Dove d è la distanza interplanare della famiglia considerata, λ è la lunghezza d'onda dell'onda incidente, e θ è l'angolo di incidenza dell'onda rispetto al piano cristallino. Per i piani della famiglia {111}, la distanza interplanare si può calcolare come:

$$d_{111} = \frac{a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.577\ nm$$

Per una radiazione luminosa, l'energia e la lunghezza d'onda sono relazionate come:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{E}$$

La condizione equivalente sull'energia è quindi:

$$\frac{nhc}{E} = 2d \sin\theta \quad \rightarrow \quad E = \frac{nhc}{2d \sin\theta}$$

Per ottenere la minima energia occorre quindi minimizzare il numeratore ($n = 1$) e massimizzare il denominatore ($\sin\theta = 1$), da cui si ottiene:

$$E_{min} = (n = 1, \sin\theta = 1) = \frac{hc}{2d} = 1.076\ keV$$

Ovvero una lunghezza d'onda della radiazione luminosa pari a:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{E_{min}} = 1.15\ nm$$

Se si sostituisse la sorgente luminosa con una sorgente elettronica, per realizzare la stessa condizione operativa si dovrebbe portare l'elettrone ad avere la medesima lunghezza d'onda (di de Broglie):

$$\lambda_{dB} = \lambda_{max} = 1.15\ nm$$

Per l'elettrone, diversamente dal fotone, la lunghezza d'onda e l'energia (cinetica) sono legate come:

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_{dB}^2} = 1.13\ eV \quad \rightarrow \quad E_k = qV_A \quad \rightarrow \quad V_A = 1.13\ V$$

Esercizio 3

Due corpi neri di raggi r_1 e r_2 con $r_1 = 2r_2$ emettono la stessa potenza P. Determinare il rapporto λ_2/λ_1 fra le lunghezze d'onda di picco dei rispettivi spettri di emissione.

Soluzione 3

La potenza emessa da un corpo nero è descritta dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$P = \sigma A T^4$$

La lunghezza d'onda di picco dello spettro di emissione è invece legata alla temperatura dalla legge di Wien:

$$\lambda_{peak} T = c_w \quad \rightarrow \quad T = \frac{c_w}{\lambda_{peak}}$$

Sostituendo, si ottiene quindi:

$$P = \frac{\sigma A c_w^4}{\lambda_{peak}^4} = \frac{\sigma \cdot 4\pi r^2 \cdot c_w^4}{\lambda_{peak}^4}$$

Poiché le potenze sono uguali per entrambi i corpi neri, deve allora valere:

$$P_1 = \frac{\sigma \cdot 4\pi r_1^2 \cdot c_w^4}{\lambda_1^4} = P = \frac{\sigma \cdot 4\pi r_2^2 \cdot c_w^4}{\lambda_2^4} = P_2$$

Da cui quindi:

$$\frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \rightarrow \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.71$$

Esercizio 4

Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico con catodo in oro (W = 5.1 eV) e sorgente ultravioletta (λ = 200 nm). Si calcolino (i) la tensione di stopping V_{stop} del setup e (ii) la velocità dell'elettrone all'anodo quando al setup è applicata una tensione V_A = 1 V.

Soluzione 4

I fotoni della sorgente ultravioletta hanno energia:

$$E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = 6.21\ eV$$

L'energia (cinetica) degli elettroni al catodo è quindi pari a:

$$E_{k,c} = E_{ph} - W = 1.11\ eV$$

La tensione di stopping da applicare al setup deve essere tale da annullare l'energia cinetica all'anodo, ovvero:

$$E_{k,a} = E_{k,c} + qV_{stop} = 0 \quad \rightarrow \quad V_{stop} = \frac{1}{q}\left(E_{k,a} - E_{k,c}\right) = -1.11\ V$$

Viceversa, se al setup viene applicata una tensione positiva, l'energia cinetica dell'elettrone aumenta (condizione di accelerazione). L'energia cinetica all'anodo in presenza di $V_A = 1V$ è pari a:

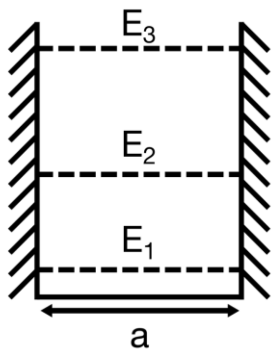
$$E_{k,a} = E_{k,c} + qV_A = 2.11\ eV$$

A cui corrisponde una velocità dell'elettrone:

$$E_{k,a} = \frac{1}{2} m_e v_a^2 \quad \rightarrow \quad v_a = \sqrt{\frac{2E_{k,a}}{m_e}} = 8.62 \cdot 10^5\ \frac{m}{s}$$

Esercizio 5

Si consideri la buca a pareti infinite di larghezza a = 1 nm in **Fig. 2**, e sia $\Psi(x,t)$ lo stato non stazionario ottenuto dalla sovrapposizione delle funzioni d'onda dei primi tre livelli energetici come $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos(k_1 x)\,e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\sin(k_2 x)\,e^{-i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\cos(k_3 x)\,e^{-i\omega_3 t}$. Dopo aver verificato la normalizzazione dello stato non stazionario, determinare l'energia media $\langle E \rangle$ e il valore energetico $\bar{E}$ più probabile a valle di una misura.



Soluzione 5

Per uno stato normalizzato deve valere

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Per lo stato considerato si ha:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \, dx =$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos(k_1 x)\,e^{+i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\sin(k_2 x)\,e^{+i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\cos(k_3 x)\,e^{+i\omega_3 t} \right)$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos(k_1 x)\,e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\sin(k_2 x)\,e^{-i\omega_2 t} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\cos(k_3 x)\,e^{-i\omega_3 t} \right) dx$$

I termini misti del tipo $\cos(\cdot)\sin(\cdot)$ sono nulli essendo l'integrale del prodotto di una funzione pari (coseno) con una funzione dispari (seno):

$$\int_{-a/2}^{a/2} \cos(k_1 x) \cdot \sin(k_2 x)\, dx = \int_{-a/2}^{a/2} \cos(k_3 x) \cdot \sin(k_2 x)\, dx = 0$$

Il terzo termine misto è nullo per l'ortogonalità delle funzioni coseno ($k_1 \neq k_3$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(k_1 x) \cdot \cos(k_3 x)\, dx = 0$$

Pertanto:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{a}\cos^2(k_1 x) + \frac{1}{2a}\sin^2(k_2 x) + \frac{1}{2a}\cos^2(k_3 x)\right)\, dx$$

Ricordando che per la buca a pareti infinite gli autostati sono localizzati ad energie:

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \rightarrow \quad k_n = n\frac{\pi}{a}$$

Corrispondenti a:

$$E_1 = 377\ meV \qquad E_2 = 1.5\ eV \qquad E_3 = 3.39\ eV$$

Allora:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{a}\cos^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot x\right) + \frac{1}{2a}\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}\cdot x\right) + \frac{1}{2a}\cos^2\left(\frac{3\pi}{a}\cdot x\right)\right) dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2a}\cdot\frac{a}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Lo stato pertanto è <u>normalizzato</u>. L'energia media $\langle E\rangle$ è quindi data da:

$$\langle E\rangle = \frac{\langle\Psi|\hat{E}|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}$$

$$\langle\Psi|\hat{E}|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial\ \cdot}{\partial t}\right)\Psi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\Psi^* i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t}\, dx =$$
$$= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\hbar\omega_1}{\pi}\cos^2(k_1 x) + \frac{\hbar\omega_2}{2\pi^2}\sin^2(k_2 x) + \frac{\hbar\omega_3}{2\pi}\cos^2(k_3 x)\right) dx = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{4}E_2 + \frac{1}{4}E_3$$

Da cui quindi:

$$\langle E\rangle = \frac{\frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{4}E_2 + \frac{1}{4}E_3}{1} = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{4}E_2 + \frac{1}{4}E_3 = 1.41\ eV$$

Le probabilità di misurare le tre energie considerate sono invece:

$$P_1 = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

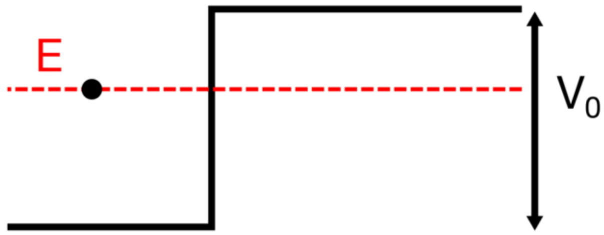
$$P_2 = \frac{1}{4} = 25\ \%$$

$$P_3 = \frac{1}{4} = 25\ \%$$

Quindi il valore più probabile per la misura sarà $E_1 = 377\ meV$.

Esercizio 6

Si consideri il gradino di potenziale in **Fig. 3**, dove V_0 = 2 eV ed E < V_0. Sapendo che a una distanza x_d = 1 nm dal gradino il modulo quadro della funzione d'onda $|\psi(x_d)|^2$ è pari al 10% del valore ad x = 0, calcolare l'energia E dell'elettrone. Si scriva quindi la funzione d'onda $\Psi(x,t)$ della particella per x < 0, calcolando esplicitamente il vettore d'onda k e la pulsazione ω.



Soluzione 6

Nella regione del gradino, la funzione d'onda dell'elettrone è caratterizzata da un decadimento esponenziale:

$$\Psi(x,t) = C \cdot e^{-\alpha x} e^{-i\omega t} = (C e^{-\alpha x}) e^{-i\omega t}$$

Il modulo quadro è corrispondentemente caratterizzato da un decadimento esponenziale con lunghezza caratteristica $\frac{1}{2\alpha}$:

$$|\Psi(x,t)|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x} = |\psi(x)|^2$$

Dal testo, il modulo quadro ad $x = x_d$ è pari al 10% del valore ad $x = 0$, ovvero:

$$|\psi(x_d)|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x_d} = 0.1 \cdot |C|^2 e^{-2\alpha \cdot 0} = 0.1\, |C|^2 = |\psi(0)|^2$$

Da cui si può ricavare il valore di α come:

$$-2\alpha x_d = \log(0.1)$$

$$\alpha = -\frac{\log(0.1)}{2x_d} = 1.15 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

Dalla definizione di α si ottiene quindi il valore dell'energia come:

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad \rightarrow \quad E = V_0 - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} = 1.95\ eV$$

Posto il riferimento energetico al potenziale in regione x < 0, si può quindi scrivere:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = 7.14 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = 2.96 \cdot 10^{15} \frac{rad}{s} = 2\pi \cdot 471\ THz$$

La funzione d'onda in regione x < 0 si può scrivere come sovrapposizione di due onde piane contropropaganti:

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(-kx-\omega t)} = \left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

Imponendo la continuità dell'autofunzione e della sua derivata in $x = 0$, possiamo legare fra loro A, B, C come:

$$\psi(0^-) = \psi(0^+) \quad \rightarrow \quad A + B = C$$

$$\frac{d\psi}{dx}|_{x=0^-} = \frac{d\psi}{dx}|_{x=0^+} \quad \rightarrow \quad ikA - ikB = -\alpha C$$

Da cui:

$$B = C - A$$

$$ikA - ikC + ikA = -\alpha C \quad \rightarrow \quad (ik - \alpha)C = 2ikA \quad \rightarrow \quad C = \frac{2ik}{ik - \alpha}A$$

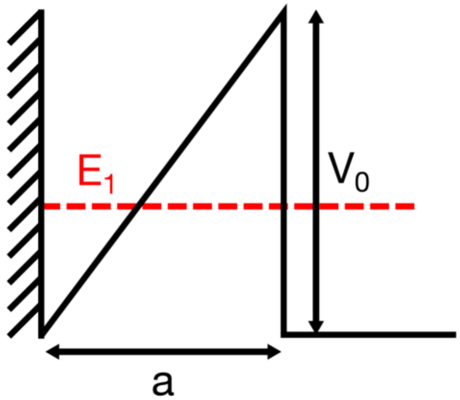
$$B = \frac{2ik - ik + \alpha}{ik - \alpha}A = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha}A$$

L'autofunzione in regione x < 0 è quindi esprimibile come:

$$\Psi(x,t) = \left(Ae^{ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha}Ae^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

Esercizio 7

Si consideri il sistema buca-barriera in **Fig. 4**, dove a = 1 nm e V_0 = 5 eV. Dopo aver stimato la posizione dei livelli energetici della buca mediante principio di indeterminazione di Heisenberg, si calcoli il tempo medio di tunneling per un elettrone sul primo livello energetico.



Soluzione 7

La buca considerata è descritta da un potenziale del tipo:

$$V(x) = \frac{V_0}{a} \cdot x \qquad 0 < x < a$$

Dal principio di indeterminazione di Heisenberg possiamo imporre che per i livelli confinati:

$$\Delta p \Delta x \simeq n\hbar \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dove:

$$\Delta p \simeq \sqrt{2mE} \qquad \Delta x \simeq x_{max} - x_{min} = a \cdot \frac{E}{V_0} - 0 = a \cdot \frac{E}{V_0}$$

Allora:

$$\frac{a\sqrt{2m}}{V_0} E^{\frac{3}{2}} \simeq n\hbar \qquad \rightarrow \qquad E_n \simeq n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\hbar V_0}{a\sqrt{2m}}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \rightarrow \qquad E_1 \simeq 0.985\ eV$$

Il tempo medio di tunneling è dato in generale da:

$$t_{TUN} = \frac{t_{AR}}{P_t}$$

La barriera vista da un elettrone ad energia E è di tipo triangolare (tunneling Fowler-Nordheim), con campo e barriera equivalente:

$$F = \frac{1}{q}\frac{V_0}{a} = 5\frac{V}{nm} \qquad\qquad \phi = (V_0 - E_1) = 5\ eV - 0.985\ eV = 4.015\ eV$$

Pertanto:

$$P_t = e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\,q\hbar F}\phi^{\frac{3}{2}}} = 1.7 \cdot 10^{-5}$$

Per calcolare il tempo di andata e ritorno, occorre tenere conto della variazione dell'energia potenziale (e conseguentemente della variazione di energia cinetica) subita dall'elettrone nella traiettoria all'interno della buca. In approssimazione semiclassica:

$$t_{AR} = 2 \cdot \int_0^a \frac{dx}{v(x)} = 2 \cdot \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E_k(x)}{m_e}}} = \sqrt{2m_e} \cdot \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{E_1 - V(x)}} = \sqrt{2m_e} \cdot \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{E_1 - V_0 \cdot \frac{x}{a}}}$$

Definito il cambio di variabile $y = E_1 - V_0 \cdot \frac{x}{a}$, allora:

$$x = 0 \quad \leftrightarrow \quad y = E_1$$

$$x = a \quad \leftrightarrow \quad y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{V_0}{a} \rightarrow dx = -\frac{a}{V_0} dy$$

Da cui si ottiene:

$$t_{AR} = -\frac{a\sqrt{2m_e}}{V_0} \cdot \int_{E_1}^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{a\sqrt{2m_e}}{V_0} \cdot \left[2\left(0 - \sqrt{E_1}\right)\right] = \frac{2a \cdot \sqrt{2m_e \cdot E_1}}{V_0} = 1.35\, fs$$

Il tempo di tunneling medio risulta quindi pari a:

$$t_{TUN} = \frac{t_{AR}}{P_t} = 74.3\, ps$$

Esercizio 8

Si considerino due buche rettangolari aventi la medesima larghezza a, accoppiate a mezzo di una barriera deltiforme di modulo u_0 = 1 eV·nm. Sapendo che il terzo autostato pari è localizzato ad un'energia E_{3p} = 1 eV, determinare la frequenza di oscillazione ν dello stato non stazionario associato al terzo doppietto. Si disegni quindi in maniera qualitativa il modulo quadro della funzione d'onda del terzo doppietto $|\Psi_{56}|^2$ al tempo $t = \frac{1}{4\nu}$, sapendo che al tempo t = 0 la particella è localizzata interamente nella buca di destra.

Soluzione 8

Per due buche accoppiate di pari larghezza a, si distinguono autofunzioni pari e dispari secondo:

$$\tan(k_d a) = 0 \qquad \text{dispari}$$

$$\tan(k_p a) = -\frac{\hbar^2 k_p}{m u_0} \qquad \text{pari}$$

Nota l'energia del terzo autostato pari, si può ricavare la dimensione delle singole buche come:

$$k_p = \frac{\sqrt{2mE_3}}{\hbar} = 5.12 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

$$a = \frac{1}{k_p}\left[\text{atan}\left(-\frac{\hbar^2 k_p}{m u_0}\right) + n\pi\right]$$

Dove $\text{atan}(\cdot) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e n è l'indice del doppietto. Poiché l'energia è riferita al terzo autostato pari, $n = 3$ da cui:

$$a = \frac{1}{k_p}\left[\text{atan}\left(-\frac{\hbar^2 k_p}{m u_0}\right) + n\pi\right] = 1.77\ nm$$

Nota la larghezza delle semibuche, si può quindi ricavare l'energia del corrispondente stato dispari come:

$$\tan(k_d a) = 0 \rightarrow k_d a = n\pi \rightarrow (n = 3) \rightarrow k_d = \frac{3\pi}{a} = 5.33 \cdot 10^9\ m^{-1}$$

$$E_{3d} = \frac{\hbar^2 k_d^2}{2m_e} = 1.084\ eV$$

Lo stato non-stazionario formato dalla sovrapposizione dei due livelli oscilla quindi con frequenza:

$$\nu = \frac{E_{3d} - E_{3p}}{h} = \frac{84\ meV}{h} = 20.3\ THz$$

La funzione d'onda del doppietto si può quindi scrivere come:

$$\Psi_{56}(x,t) = a_5\psi_5(x)e^{-i\omega_5 t} + a_6\psi_6(x)e^{-i\omega_6 t} = e^{-i\omega_5 t}\left(a_5\psi_5 + a_6\psi_6 e^{-i\Delta\omega t}\right)$$

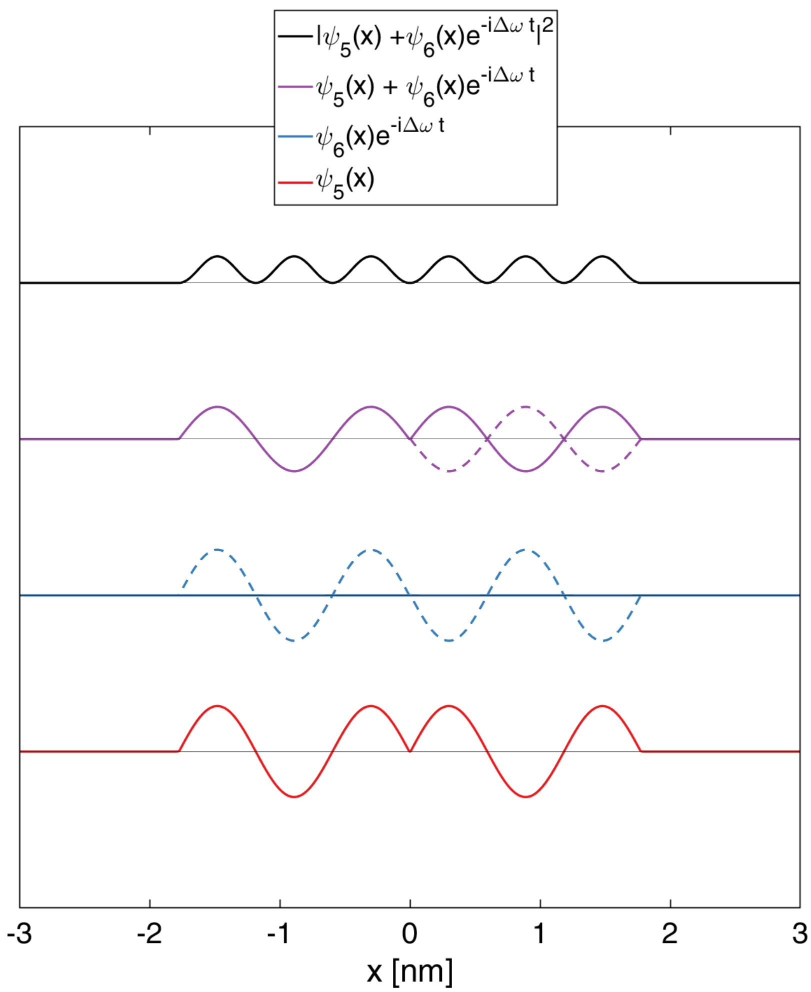
Da cui il modulo quadro:

$$|\Psi|^2 = \left|a_5\psi_5 + a_6\psi_6 e^{-i\Delta\omega t}\right|^2$$

Al tempo richiesto si ha quindi:

$$|\Psi|^2 = \left|a_5\psi_5 + a_6\psi_6 e^{-\frac{i\Delta\omega}{4\nu}}\right|^2 = \left|a_5\psi_5 + a_6\psi_6 e^{-\frac{i\Delta\omega}{4\cdot\frac{\Delta\omega}{2\pi}}}\right|^2 = \left|a_5\psi_5 + a_6\psi_6 e^{-i\frac{\pi}{2}}\right|^2 = |a_5\psi_5 + j\cdot a_6\psi_6|^2$$
$$= |a_5\psi_5|^2 + |a_6\psi_6|^2 = |a_6|^2|\psi_5|^2 + |a_6|^2|\psi_6|^2$$

Assumendo $|a_5| = |a_6| = |a|$, e ricordando che per il terzo doppietto le funzioni d'onda ψ_5, ψ_6 presentano ciascuna tre lobi in ogni semibuca, si può quindi tracciare il grafico qualitativo come:



Esercizio 9

Si consideri un pacchetto d'onde gaussiano centrato in $k_0 = 10^9\ m^{-1}$, propagantesi in un materiale caratterizzato da una relazione di dispersione $E(k) = E_0(1 + \cos(ka))$, con a = 0.1 nm, E_0 = 1 eV. Sapendo che al tempo t = 100 ps la dispersione spaziale del pacchetto è pari al doppio della dispersione iniziale (t = 0), determinare la deviazione standard σ_k del peso gaussiano.

Soluzione 9

La dispersione spaziale del pacchetto nel tempo è data da:

$$\sigma_x = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} t^2}$$

Dove:

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_k^2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}|_{k=k_0} = -\frac{a^2 E_0}{2\hbar}\cos(k_0 a) = -7.55 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s}$$

Sapendo che al tempo $\bar{t} = 100\ ps$ la dispersione iniziale è il doppio di quella iniziale, si può quindi scrivere:

$$\sigma_x(\bar{t}) = \sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\bar{t}^2} = 2\sigma_x(0) = 2\sqrt{\alpha}$$

Da cui:

$$\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\bar{t}^2 = 4\alpha$$

$$3\alpha^2 = \beta^2\bar{t}^2$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}|\beta|\bar{t} = 4.36 \cdot 10^{-16}\ m^2 = (20.9\ nm)^2$$

Ricordando la definizione di α, la deviazione standard del peso gaussiano risulta quindi pari a:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = 3.38 \cdot 10^7\ m^{-1}$$

Esercizio 10

Un elettrone in un cristallo di passo reticolare a = 1 nm è descritto da un'autofunzione $\psi_k(x)$ con k = $3.14\cdot10^9$ m^{-1}. Dopo aver stimato il numero di passi reticolari N affinché l'autofunzione torni in fase, si disegni il profilo della parte reale della funzione inviluppo e dell'autofunzione su 2N passi reticolari, sapendo che la funzione di Bloch è di tipo pari con un solo massimo in corrispondenza dell'atomo.

Soluzione 10

Dal teorema di Bloch, l'autofunzione dell'elettrone nel cristallo si può scrivere come:

$$\psi_k(x) = e^{ikx}u_k(x)$$

Dove $u_k(x)$ ha periodo pari al passo cristallino a. Per determinare il numero di passi reticolari affinché l'autofunzione torni in fase si può quindi scrivere:

$$\psi_k(x+Na) = e^{ik(x+Na)}u_k(x+Na) = \psi_k(x) = e^{ikx}u_k(x)$$

Allora, essendo per periodicità:

$$u_k(x+Na) = u_k(x)$$

Perché l'equazione sia rispettata deve valere:

$$e^{ik(x+Na)} = e^{ikx} \quad \rightarrow \quad e^{ikNa} = e^{i2\pi}$$

Pertanto:

$$N = \frac{2\pi}{ka} = 2$$

Ovvero l'autofunzione torna in fase dopo 2 passi reticolari. I corrispondenti profili sono quindi: