

17/06/2026 – Seconda prova in itinere, soluzioni.

Esercizio 1

Si consideri un semiconduttore a gap diretto ($m_{BC}^* = 0.04m_0$, $m_{BV}^* = 0.3m_0$, $E_g = 0.92$ eV). Determinare il momento iniziale k_i e finale k_f di un elettrone che venga promosso dalla banda di valenza alla banda di conduzione in presenza di un fotone di energia $E_{ph} = 1.2$ eV e un fonone di momento $k_{phn} = +2 \cdot 10^8$ m⁻¹ ed energia $E_{phn} = 200$ meV. Rappresentare le transizioni in un grafico E-k.

Soluzione 1

Per un semiconduttore a gap diretto l'apice della banda di valenza e il fondo della banda di conduzione sono allineati in $k = 0$. Le due bande possono essere descritte come:

$$E_V(k) = -Ak^2 = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BV}^*}$$
$$E_C(k) = E_g + Bk^2 = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{BC}^*}$$

Con:

$$A = \frac{\hbar^2}{2m_{BV}^*} \approx 0.127 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$$

$$B = \frac{\hbar^2}{2m_{BC}^*} \approx 0.954 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$$

L'elettrone è inizialmente localizzato nella banda di valenza con momento k_i , e conseguentemente energia $E_V(k_i)$. Nel processo, l'elettrone acquista energie per interazione sia con il fotone che con il fonone. Inoltre, l'elettrone cambierà il suo momento per interazione con il fonone.

$$E_C(k_f) - E_V(k_i) = E_{ph} + E_{phn}$$

$$k_f = k_i + k_{phn}$$

Sviluppando le espressioni:

$$E_g + Bk_f^2 + Ak_i^2 = E_{ph} + E_{phn}$$

$$E_g + B(k_i + k_{phn})^2 + Ak_i^2 = E_{ph} + E_{phn}$$

$$(A + B)k_i^2 + 2Bk_ik_{phn} + Bk_{phn}^2 - E_{ph} - E_{phn} + E_g = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si può trovare il momento iniziale:

$$k_i = \frac{-2Bk_{phn} \pm \sqrt{4B^2k_{phn}^2 - 4(A+B)(Bk_{phn}^2 - E_{ph} - E_{phn} + E_g)}}{2(A+B)}$$

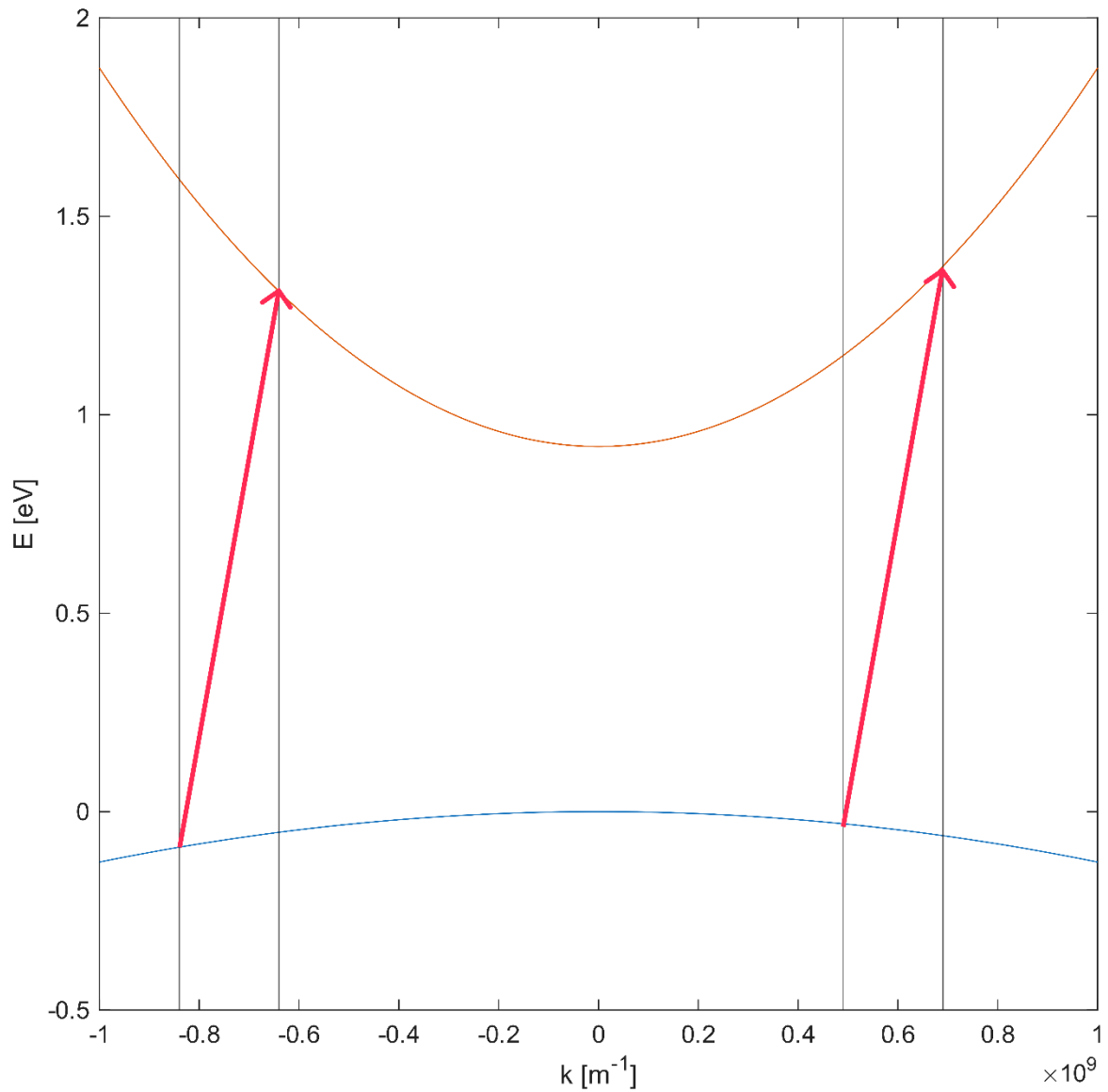
Si ricavano due possibili valori di k_i da cui è possibile ricavare i corrispondenti momenti finali

$$k_{i_1} \approx -8.40 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{i_2} \approx 4.90 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{f_1} = k_{i_1} + k_{phn} \approx -6.40 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{f_2} = k_{i_2} + k_{phn} \approx 6.90 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$$



Esercizio 2

Un semiconduttore monodimensionale ha la propria banda di conduzione descritta dalla relazione di dispersione $E(k) = E_0/2 \cdot [1 - \cos(ka)]$, con $E_0 = 3.1$ eV e $a = 0.9$ nm. Nota la frequenza di oscillazione di Bloch $\nu_{Bloch} = 5$ THz, calcolare il campo elettrico F applicato ai capi del semiconduttore. Valutare inoltre il numero di oscillazioni visibili in media se si assume un tempo di rilassamento del momento $\tau_m = 1$ ps.

Soluzione 2

Dalla frequenza di Bloch è possibile ricavare il campo elettrico F applicato ai capi del semiconduttore

$$\nu_{Bloch} = \frac{\omega_{Bloch}}{2\pi} = \frac{qFa}{2\pi\hbar} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = \frac{2\pi\hbar\nu_{Bloch}}{qa} = 229,8 \frac{kV}{cm}$$

Noto il tempo di rilassamento del momento, è possibile valutare il numero di oscillazioni di Bloch:

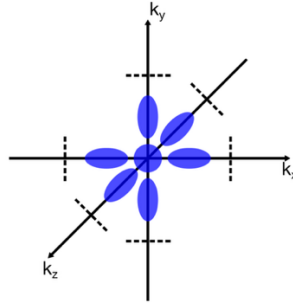
$$N_{osc,Bloch} = \frac{\tau_m}{T_{Bloch}} = \tau_m \nu_{Bloch} = 5$$

Esercizio 3

Si consideri il diagramma a bande del semiconduttore 3D in **Fig.1**, caratterizzato da due famiglie di minimi isoenergetici in banda di conduzione. Nota la massa efficace DOS per gli elettroni in banda di conduzione ($m_{DOS}^* = 1.63m_e$), e le masse longitudinali e trasversali del minimo anisotropo ($m_t^* = 0.3m_e$, $m_l^* = 0.8m_e$), calcolare la massa efficace del minimo isotropo nel punto Γ . Calcolare in fine la massa di conduzione.

Soluzione 3

La massa DOS è determinata imponendo l'uguaglianza tra i volumi isoenergetici di Fermi associati ai diversi minimi della banda di conduzione. Dal diagramma a bande in Fig.3 si individua un minimo isotropo nel punto Γ e un secondo minimo anisotropo lungo la direzione $\Gamma - X$. Nello spazio reciproco, le superfici isoenergetiche di Fermi sono rappresentate rispettivamente da una sfera, nel caso del minimo in Γ , e da sei ellissoidi equivalenti orientati lungo le gli assi k_x , k_y e k_z



$$m_{DOS}^{3/2} = m_{\Gamma}^{3/2} + 6\sqrt{m_t^2 m_l} \Rightarrow m_{\Gamma} = \left(m_{DOS}^{3/2} - 6\sqrt{m_t^2 m_l} \right)^{2/3} = 0.605m_e$$

Per determinare la massa efficace di conduzione, si considera la media armonica delle masse efficaci m_{Γ} , m_t e m_l , tenendo conto della degenerazione delle valli e del numero di contributi forniti da ciascun minimo lungo una generica direzione di conduzione. In particolare, il minimo isotropo nel punto Γ fornisce un unico contributo, mentre i sei minimi equivalenti lungo la direzione $\Gamma - X$ contribuiscono con due masse longitudinali m_l e quattro masse trasversali m_t .

$$\frac{m_{DOS}^{3/2}}{m_c} = 1 \cdot \frac{m_{\Gamma}^{3/2}}{m_{\Gamma}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_t} + 2 \cdot \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_l} \Rightarrow m_c = \left(\frac{m_{\Gamma}^{3/2}}{m_{\Gamma} \cdot m_{DOS}^{3/2}} + 4 \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_t \cdot m_{DOS}^{3/2}} + 2 \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_l \cdot m_{DOS}^{3/2}} \right)^{-1} = 0.414m_e$$

Esercizio 4

Si consideri un catodo di cobalto con funzione lavoro $W_{Co} = 5\text{eV}$ e superficie emissiva $\mathcal{A}_{Co} = 15\text{cm}^2$. Facendo ragionevoli approssimazioni, determinare la superficie di un catodo di osmio, avente funzione lavoro $W_{Os} = 4.8\text{eV}$, affinché i due catodi producano la stessa corrente termoionica alla temperatura $T_1 = 1800\text{K}$.

Soluzione 4

La corrente termoionica può essere stimata tramite la legge di Richardson-Dushman

$$I = \mathcal{A} \cdot A \cdot T_1^2 e^{-\frac{W}{kT_1}}$$

Dove \mathcal{A} rappresenta l'area del nostro catodo metallico, A è la costante di Richardson, T_1 è la temperatura di operazione del catodo e W rappresenta la funzione lavoro del metallo.

Come ragionevole approssimazione, assumiamo la costante di Richardson uguale per cobalto e osmio. Per trovare l'area di osmio richiesta dal testo è sufficiente uguagliare le correnti termoioniche di cobalto ed osmio

$$\begin{aligned} I_{Co} = I_{Os} &\Rightarrow \mathcal{A}_{Co} \cdot A \cdot T_1^2 e^{-\frac{W_{Co}}{kT_1}} = \mathcal{A}_{Os} \cdot A \cdot T_1^2 e^{-\frac{W_{Os}}{kT_1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{A}_{Os} = \mathcal{A}_{Co} e^{\frac{W_{Os}-W_{Co}}{kT_1}} = 4.13 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Esercizio 5

Un campione di silicio di tipo p è irraggiato da una sorgente luminosa che induce una fotogenerazione uniforme nel volume del materiale. Conoscendo all' equilibrio la distanza tra il quasi livello di Fermi F_n e il livello di Fermi (E_F è $F_n - E_F = 300$ meV), determinare il rapporto tra la concentrazione degli elettroni dopo l'irraggiamento e quella presente prima dell'irraggiamento a $T = 300$ K. Determinare il regime di iniezione del materiale.

Soluzione 5

Un semiconduttore irraggiato è in una condizione di non equilibrio. Pertanto, la concentrazione degli elettroni può essere scritta nei seguenti modi

$$\begin{aligned}n &= N_C e^{-\frac{E_C - F_n}{kT}} \\&= N_C e^{-\frac{E_C - E_F + E_F - F_n}{kT}} \\&= N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} e^{-\frac{E_F - F_n}{kT}} = \\&= n_0 e^{-\frac{E_F - F_n}{kT}}\end{aligned}$$

L'aumento della concentrazione di elettroni risulterà essere dato dal rapporto n/n_0

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{E_F - F_n}{kT}} = 1.09 \cdot 10^5$$

Lavorando a temperatura ambiente possiamo assumere tutti i droganti ionizzati. Considerando la concentrazione dei droganti $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, la risultante concentrazione dei minoritari è data da

$$n_0 = \frac{n_i^2}{N_A} = 2.1 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-3}$$

Per determinare il regime di iniezione del materiale calcoliamo la concentrazione degli elettroni a valle della fotogenerazione

$$n = 2.29 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

Questo numero differisce rispetto alla concentrazione dei droganti di 7 ordini di grandezza, confermando il regime di bassa iniezione.

Esercizio 6

Stimare la temperatura alla quale la concentrazione intrinseca dell'arseniuro di gallio (GaAs, $E_g = 1.42$ eV, $N_c(300\text{ K}) = 4.7 \cdot 10^{17}$ cm⁻³, $N_v(300\text{ K}) = 7.0 \cdot 10^{18}$ cm⁻³) è pari alla concentrazione intrinseca del silicio a temperatura ambiente, trascurando la dipendenza delle densità equivalenti di stati dalla temperatura. Commentare quindi qualitativamente come cambierebbe il risultato ottenuto se si considerassero tali dipendenze.

Soluzione 6

Trascurando la dipendenza delle densità di stati effettive con la temperatura, la concentrazione intrinseca del GaAs risulterà quindi data da

$$n_{i,\text{GaAs}}(T) \sim \sqrt{N_{C,\text{GaAs}} \cdot N_{V,\text{GaAs}}} \cdot e^{-\frac{E_{G,\text{GaAs}}}{2kT}}$$

Dove $N_{C,\text{GaAs}} = 4.7 \times 10^{17}$ cm⁻³, $N_{V,\text{GaAs}} = 7.0 \times 10^{18}$ cm⁻³ ed $E_G = 1.42$ eV. Possiamo uguagliare la concentrazione intrinseca dell'GaAs con quella del silicio a temperatura ambiente

$$n_{i,\text{GaAs}}(T) = n_{i,\text{Si}} \Rightarrow \sqrt{N_{C,\text{GaAs}} \cdot N_{V,\text{GaAs}}} \cdot e^{-\frac{E_{G,\text{GaAs}}}{2kT}} = n_{i,\text{Si}}$$

Risolviendo l'equazione si ottiene

$$T = -\frac{E_{G,\text{GaAs}}}{2k \cdot \ln\left(\frac{n_{i,\text{Si}}}{\sqrt{N_{C,\text{GaAs}} \cdot N_{V,\text{GaAs}}}}\right)} = 441.5\text{ K}$$

Esercizio 7

Si consideri un semiconduttore a $T = 300 \text{ K}$ con mobilità $\mu_n = 100 \text{ cm}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ avente un profilo di concentrazione degli elettroni mostrato in **Fig.2** descritto dalla legge $n(x) \cdot e^{-x/L_n}$, con $n(0) = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Sapendo che $n(1 \mu\text{m}) = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, calcolare L_n . Calcolare inoltre il tempo medio di ricombinazione.

Soluzione 7

Il profilo di concentrazione degli elettroni ha andamento esponenziale decrescente in x :

$$n(x) = n(0)e^{-\frac{x}{L_n}}$$

Da cui possiamo esplicitare L_n :

$$L_n = \frac{x_0}{\ln\left(\frac{n(0)}{n(1 \mu\text{m})}\right)} = 0.434 \mu\text{m}$$

Possiamo inoltre calcolare il coefficiente di diffusione D_n :

$$D_n = \mu_n V_{th} = \frac{\mu_n kT}{q} = 2.59 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

Infine, è necessario ricordarsi che $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$ per poter calcolare il tempo di ricombinazione:

$$\tau_r = \frac{L_n^2}{D_n} = 727 \text{ ps.}$$

Esercizio 8

È dato un campione di silicio drogato n in regime di freeze-out a temperatura $T=30\text{ K}$. Sapendo che la concentrazione dei donori $N_D=10^{16}\text{ cm}^{-3}$ e la concentrazione di elettroni in banda di conduzione $n = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$, calcolare l'energia di legame E_C-E_D e la differenza $E_F(0\text{K}) - E_F(T)$.

Soluzione 8

Per un silicio a temperatura ambiente, la densità di stati effettiva in banda di conduzione è $N_C = 2.8 \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3}$. Ad una temperatura $T = 30\text{ K}$,

$$N_C(30\text{ K}) = N_C(300\text{ K}) \cdot \left(\frac{30}{300}\right)^{3/2} = 8.85 \cdot 10^{17}\text{ cm}^{-3}$$

In regime di freeze-out i donori non sono completamente ionizzati

$$n \sim N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{-\frac{E_D - E_F(30\text{ K})}{kT}}}$$

Poiché $n = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$ e $N_D=10^{16}\text{ cm}^{-3}$ è possibile ricavare $E_D - E_F$

$$E_D - E_F(30\text{ K}) = kT \cdot \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N_D}{n} - 1\right)\right) = 10\text{ meV}$$

L'energia di Fermi può essere ricavata partendo dalla concentrazione degli elettroni

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F(30\text{ K})}{kT}} \Rightarrow E_C - E_F(30\text{ K}) = kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right) = 23.5\text{ meV}$$

La differenza E_C-E_D è ottenuta mediante la differenza dei due risultati precedenti

$$E_C - E_F(30\text{ K}) - (E_D - E_F(30\text{ K})) = E_C - E_D = 33.5\text{ mV}$$

Per il calcolo di $E_F(0\text{K}) - E_F(T=30\text{K})$ esplicitiamo separatamente il livello di Fermi a 0 K e a 30 K

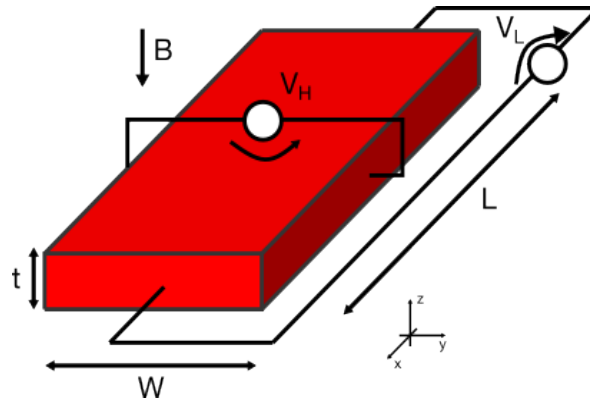
$$E_F(0\text{ K}) = \frac{E_C + E_D}{2}, \quad E_F(30\text{ K}) = E_C - kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right)$$

Valutiamone infine la differenza

$$E_F(0\text{ K}) - E_F(30\text{ K}) = \frac{E_C + E_D}{2} - E_C + kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right) = \frac{E_D - E_C}{2} + kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right) = -16.75\text{ meV} + 23.5\text{ meV} = 6.75\text{ meV}$$

Esercizio 9

Si consideri l'esperimento di effetto Hall riportato in **Fig.3**, dove è impiegata una barretta di silicio drogata p ($\mu_p=350\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$) a temperatura ambiente. Sapendo che $V_L = 2\text{ V}$, $B = 0.5\text{ T}$, $L = 30\text{ }\mu\text{m}$, $W = 5\text{ }\mu\text{m}$, determinare il modulo e il segno della tensione di Hall V_H . Discutere qualitativamente come cambierebbe il modulo di V_H al variare di B , W , T , t , L , V_L .



Soluzione 9

Poiché il semiconduttore è drogato di tipo p, la maggior parte dei portatori sono lacune, le quali si muovono in direzione $x+$ a causa del campo elettrico indotto da V_L . Poiché il campo magnetico è in direzione $z-$, applicando la legge di Lorentz otteniamo che le lacune vengono deviate in direzione $y+$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Pertanto, il segno della tensione di Hall V_H sarà positivo. All'equilibrio, la forza di Lorentz e la forza elettrostatica indotta da uno sbilanciamento delle cariche lungo la direzione y si eguagliano

$$qvB = \frac{qV_H}{W} \Rightarrow V_H = vBW = \mu V_L B \frac{W}{L} = 583\text{ mV}$$

Il modulo di V_H aumenta all'aumentare B , W , V_L o al diminuire di T (se si considera di essere limitati dallo scattering fononico) ed L . Non dipende invece dallo spessore della barretta t .

Esercizio 10

Si consideri un semiconduttore caratterizzato da tempi di rilassamento del momento per elettroni e lacune pari a $\tau_{m,n}^* = 100$ fs e $\tau_{m,n}^* = 300$ fs, rispettivamente. Sapendo che il rapporto fra le velocità è pari a $v_n/v_p = 2$ in presenza di un campo elettrico $F < F_{sat}$, si stimi il valore del rapporto v_n/v_p per $F > F_{sat}$, trascurando la dipendenza della massa efficace dal campo elettrico.

Soluzione 10

A bassi campi elettrici la velocità di drift v è data da:

$$v = \mu F$$

Dove μ indica la mobilità del portatore di interesse e F è il campo elettrico applicato.

In questo caso, il rapporto tra la velocità degli elettroni v_n e la velocità delle lacune v_p è:

$$\frac{v_n}{v_p} = 2$$

Sapendo che a bassi campi si ha

$$v_n = \mu_n F = q \frac{\tau_n}{m_n^*} F$$

$$v_p = \mu_p F = q \frac{\tau_p}{m_p^*} F$$

Si può trovare:

$$\frac{v_n}{v_p} = 2 = \frac{\tau_n m_p^*}{m_n^* \tau_p} = \frac{1 m_p^*}{3 m_n^*}$$

Per cui $\frac{m_p^*}{m_n^*} = 6$.

Nelle equazioni precedenti, τ_n e τ_p sono tempi medi di scattering con il reticolo per elettroni e lacune mentre m_n^* , m_p^* sono le masse efficaci di conduzione di elettroni e lacune.

Ad alti campi, la velocità non è più direttamente proporzionale tramite la mobilità al campo elettrico, bensì satura a valori dati dall'energia del fonone ottico del materiale in considerazione e dalla massa efficace del portatore tramite l'equazione:

$$v_{sat} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{f,ottico}}{2m^*}}$$

Da cui:

$$\frac{v_{sat,n}}{v_{sat,p}} = \sqrt{\frac{m_p^*}{m_n^*}} = \sqrt{6}$$