

17/06/2026 – Preappello

Esercizio 1

Si consideri un cristallo con reticolo cubico semplice impiegato come target in un esperimento di diffrazione a raggi X. Sapendo che il primo picco di diffrazione relativo ai piani (100) è osservabile ad un angolo $\theta_1^{100} = 41^\circ$, calcolare gli angoli di osservazione dei primi picchi di diffrazione associati rispettivamente ai piani (110) e (111).

Soluzione 1

Cominciamo a scrivere la condizione di Bragg.

Per osservare diffrazione di Bragg al primo ordine, deve essere verificata la condizione

$$2d\sin(\theta_1) = \lambda$$

Notiamo subito che λ non è un dato del problema. Per questo motivo dobbiamo trovare un modo per semplificare tale incognita.

Scriviamo le distanze tra piani cristallini della stessa famiglia nei tre differenti casi.

Dipendentemente dalla famiglia di piani, avremo $d_{(100)} = a$, $d_{(110)} = a/\sqrt{2}$ e $d_{(111)} = a/\sqrt{3}$.

Le condizioni di Bragg per le tre famiglie di piani sono quindi:

- 1) $2d_{(100)}\sin(\theta_1^{(100)}) = \lambda$
- 2) $2d_{(110)}\sin(\theta_1^{(110)}) = \lambda$
- 3) $2d_{(111)}\sin(\theta_1^{(111)}) = \lambda$

Notiamo che abbiamo tre equazioni e due sole incognite, λ e gli angoli di osservazione dei primi picchi di diffrazione nei casi (110) e (111)

Dividendo 2) con 1) e 3) con 1) è possibile semplificare λ .

$$\sin(\theta_1^{110}) = \sqrt{2} \sin(\theta_1^{100}) \Rightarrow \theta_1^{110} = 68,09^\circ$$

$$\sin(\theta_1^{110}) = \sqrt{2} \sin(\theta_1^{100}) > 1$$

Non si osservano picchi di diffrazione per i piani (111).

Esercizio 2

Si consideri un profilo di potenziale del tipo $V(x) = \alpha x^\beta$, con $\alpha = 0.1 \text{ eV/nm}^{5/2}$, $\beta = 5/2$. Dopo aver stimato a mezzo del principio di indeterminazione di Heisenberg l'esponente γ della progressione degli autovalori n^γ , determinare la lunghezza d'onda del fotone associato al rilassamento dal terzo al secondo autostato.

Soluzione 2

L'indeterminazione sulla posizione è approssimabile come:

$$x_{min} = -\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}, x_{max} = +\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow \Delta x = 2\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Possiamo invece approssimare la indeterminazione sul momento con:

$$p_{min} = -\sqrt{2mE}, p_{max} = +\sqrt{2mE} \Rightarrow \Delta p = 2\sqrt{2mE}$$

Ricordando il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \approx n\hbar$$

$$\frac{4\sqrt{2m}}{a^{\frac{1}{\beta}}} \cdot E^{\frac{\beta+2}{2\beta}} = n\hbar$$

$$E = n^{\frac{2\beta}{\beta+2}} \cdot \left(\frac{\hbar a^{\frac{1}{\beta}}}{4\sqrt{2m}}\right)^{\frac{2\beta}{\beta+2}}$$

Gli autovalori quindi progrediscono con γ pari a:

$$\gamma = \frac{2\beta}{\beta+2} = \frac{2 \cdot 5}{5+4} = \frac{10}{9}$$

Per determinare la lunghezza d'onda del fotone del rilassamento $E_4 \rightarrow E_2$, occorre prima calcolare le energie dei due autostati:

$$E_4 = 4^{\frac{10}{9}} \cdot (12.5 \text{ meV}) = 58.5 \text{ meV}$$

$$E_2 = 2^{\frac{10}{9}} \cdot (12.5 \text{ meV}) = 27.1 \text{ meV}$$

Da cui:

$$\lambda_{4 \rightarrow 2} = \frac{hc}{\Delta E_{42}} = \frac{hc}{31.4 \text{ meV}} \approx 39.5 \mu\text{m}$$

Esercizio 3

3. Si consideri il gradino di potenziale di altezza $V = 0.75 \text{ eV}$ riportato in Fig. 2. Sapendo che il rapporto tra flusso trasmesso e flusso incidente è pari a $1/5$, calcolare l'energia cinetica del fascio elettronico incidente e il rapporto tra flusso riflesso e flusso trasmesso.

Soluzione 3

Sappiamo che $\frac{\phi_t}{\phi_i} = \frac{1}{5}$, inoltre:

$$\frac{\phi_t}{\phi_i} = \frac{k'}{k} \left(\frac{2k}{k+k'} \right)^2$$

Perciò

$$\frac{k'}{k} \left(\frac{2k}{k+k'} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

Definendo $\frac{k'}{k} = x$, otteniamo $\frac{4x}{(1+x)^2} = \frac{1}{5}$, da cui si ottiene una equazione di secondo grado:

$$x^2 - 18x + 1 = 0$$

Che ha come soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 4}}{2} = 9 \pm 2\sqrt{80}$$

$$x_1 \approx 0.0557, \quad x_2 \approx 17.944$$

La seconda soluzione non può essere accettata in quanto deve essere $k' < k$.

Inoltre, valgono le seguenti relazioni: $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k' = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$

$$\frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{E-V}}{\sqrt{E}} \approx 0.0557 \Rightarrow E(1 - 0.0557^2) = V \Rightarrow E = \frac{V}{0.9969} = \frac{0.75}{0.9440} \approx 0.7523 \text{ eV}.$$

Infine, sapendo che la somma tra flusso riflesso e trasmesso deve essere pari al flusso incidente, possiamo trovare il rapporto tra flusso riflesso e trasmesso:

$$\frac{\phi_r}{\phi_i} = 1 - \frac{\phi_t}{\phi_i} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\phi_r}{\phi_t} = \frac{\phi_r}{\phi_i} \frac{\phi_i}{\phi_t} = \frac{4}{5} * \frac{5}{1} = 4$$

Esercizio 4

Si consideri la barriera di potenziale in Fig. 2, dove $V_1 = 1$ eV, $V_2 = 0.5$ eV e $a = 2$ nm. Determinare le probabilità di tunneling P_T per un elettrone ad energia $E = 0.25$ eV.

Soluzione 4

Dividendo la barriera nelle regioni (1), (2) e (3), è possibile scrivere la probabilità di tunneling totale come:

$$P_T = P_{T1} \cdot P_{T2} \cdot P_{T3}$$

Le tre probabilità possono essere determinate a mezzo dell'approssimazione WKB:

$$P_{WKB} = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(W(x)-E)} dx}$$

Per le regioni (1) e (3) vale l'approssimazione Fowler-Nordheim con $W_1(x) = \frac{V_2}{1.5a}$ e $W_2(x) = \frac{V_2}{a}$

Quindi, nel caso di $E = 0.25$ eV:

$$P_{T1} = \exp\left(-\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2m}}{V_2\hbar} 1.5a(V_2 - E)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$P_{T3} = \exp\left(-\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2m}}{V_2\hbar} a(V_2 - E)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Per la regione (2) si ha $W(x) = V_1$

$$P_{T2} = \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m(V_1 - E)}}{\hbar} a\right)$$

Quindi avremo:

$$P_{T,E} \approx (0.00596) \cdot (1.98 \cdot 10^{-8}) \cdot (0.033) \approx 3.9 \cdot 10^{-12}$$

Esercizio 5

Si consideri un box di potenziale 2D a pareti infinite mostrato in Fig. 3, dove $a = 2 \text{ nm}$ e $b = 3 \text{ nm}$. Dopo aver calcolato l'energia dei primi quattro autostati, si scrivano le corrispondenti autofunzioni. È possibile avere autostati degeneri?

Soluzione 5

Per un box 2D di potenziale, le autofunzioni si possono esprimere usando la separazione delle variabili come:

$$\psi(x, y) = \psi_x(x)\psi_y(y)$$

Conseguentemente le energie degli autostati sono date da:

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2}n_x^2 + \frac{h^2}{8mb^2}n_y^2 = \frac{h^2}{8ma^2}\left(n_x^2 + \frac{a^2}{b^2}n_y^2\right) = \frac{h^2}{8ma^2}n_{eff}^2$$

n_x	n_y	n_{eff}^2	E
1	1	1.44	136 meV
1	2	2.79	262 meV
2	1	4.44	419 meV
1	3	5.04	471 meV
2	2	5.79	544 meV

Il primo autostato si ha per $n_x = 1, n_y = 1$, da cui: $E_1^{11} \approx 0.136 \text{ eV}$

I secondi autostati, si trovano per $n_x = 1, n_y = 2$ e per $n_x = 2, n_y = 1$.

$$E_2^{21} \approx 0.261 \text{ eV}$$

$$E_3^{12} \approx 0.418 \text{ eV}$$

Spinti dalla conoscenza dei livelli energetici di una buca di potenziale 2D con lati simmetrici, potremmo pensare di muoverci direttamente alla coppia $n_x = 2, n_y = 2$, a cui corrisponde una energia $E_5^{22} \approx 0.544 \text{ eV}$.

Sapendo però che in questo caso la buca non è simmetrica ed essendo $b > a$, dobbiamo controllare anche il caso $n_x = 1, n_y = 3$. A questa coppia di numeri quantici corrisponde una energia E_4^{13} :

$$E_4^{13} \approx 0.471 \text{ eV}$$

I vettori d'onda nelle direzioni x e y sono ricavabili imponendo che, nella corrispondente larghezza del box, siano presenti una e due semi lunghezze d'onda essendo $n_{x,y} \in \{1,2,3\}$ nei casi d'interesse.

Ovvero, nel caso $n_x = 1, n_y = 1$ i vettori d'onda saranno:

$$k_x^1 = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a} \approx 1.571 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k_y^1 = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{b} \approx 1.047 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Nel caso $n_x = 1, n_y = 2$ avremo $k_x^1 \approx 1.571 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$ come prima e:

$$k_y^2 = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{b} \approx 2.094 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Viceversa, nel caso $n_x = 2, n_y = 1$ sarà $k_y^1 \approx 1.047 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$ e:

$$k_x^2 = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{a} = \pi \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Nel caso $n_y = 3$ sarà:

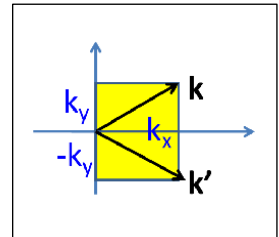
$$k_y^3 = \frac{2\pi}{b \cdot \frac{2}{3}} \approx 3 \cdot \pi \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Infine, nel caso $n_x = 2, n_y = 2$:

$$k_x^2 = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{a} = \pi \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} \quad k_y^2 = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{b} \approx \frac{2}{3} \pi \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Sviluppando l'espressione dell'autofunzione relativa ai corrispondenti autostati si ottiene

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= A \sin(k_x x) \sin(k_y y) = \frac{A}{-4} (e^{ik_x x} - e^{-ik_x x})(e^{ik_y y} - e^{-ik_y y}) \\ &= -\frac{A}{2} (\cos(k_x x + k_y y) - \cos(k_x x - k_y y)) \\ &= -\frac{A}{2} (\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})) \end{aligned}$$



Segue che:

$$|k_{ij}| = \sqrt{(k_x^i)^2 + (k_y^j)^2}$$

Infine:

$$k_{11} \approx 1.89 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{12} \approx 2.62 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{21} \approx 3.31 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{13} \approx 3.51 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$k_{22} \approx 3.78 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Infine, è possibile avere autostati degeneri. Anche se la rottura della simmetria geometrica tra x e y fa sì che scambiare semplicemente i valori di n_x con quelli di n_y non garantisca più la stessa energia, è comunque possibile trovare dei valori di n_x e n_y per cui otteniamo lo stesso valore energetico.

Per esempio, ricordando che
$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n_x^2 + \frac{h^2}{8mb^2} n_y^2 = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right)$$

Scegliendo le coppie: $(n_x = 2, n_y = 9)$ e $(n_x = 6, n_y = 3)$ otteniamo lo stesso valore $E \approx 3.765 \text{ eV}$.

Esercizio 6

Un semiconduttore monodimensionale ha la propria banda di conduzione descritta dalla relazione di dispersione $E(k) = E_0/2 \cdot [1 - \cos(ka)]$, con $E_0 = 3.1$ eV e $a = 0.9$ nm. Nota la frequenza di oscillazione di Bloch $\nu_{Bloch} = 5$ THz, calcolare il campo elettrico F applicato ai capi del semiconduttore. Valutare inoltre il numero di oscillazioni visibili in media se si assume un tempo di rilassamento del momento $\tau_m = 1$ ps.

Soluzione 6

Dalla frequenza di Bloch è possibile ricavare il campo elettrico F applicato ai capi del semiconduttore

$$\nu_{Bloch} = \frac{\omega_{Bloch}}{2\pi} = \frac{qFa}{2\pi\hbar} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F = \frac{2\pi\hbar\nu_{Bloch}}{qa} = 229,8 \frac{kV}{cm}$$

Noto il tempo di rilassamento del momento, è possibile valutare il numero di oscillazioni di Bloch:

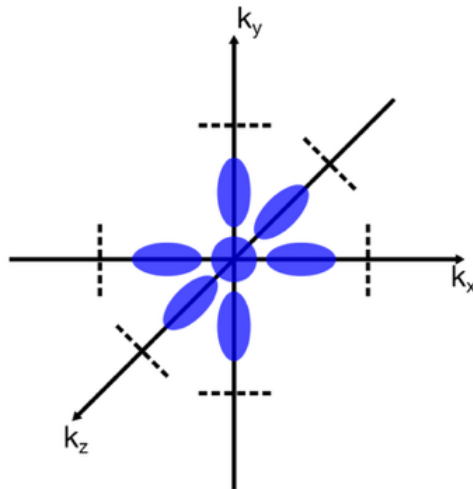
$$N_{osc,Bloch} = \frac{\tau_m}{T_{Bloch}} = \tau_m \nu_{Bloch} = 5$$

Esercizio 7

Si consideri il diagramma a bande del semiconduttore 3D in **Fig.3**, caratterizzato da due famiglie di minimi isoenergetici in banda di conduzione. Nota la massa efficace DOS per gli elettroni in banda di conduzione ($m_{DOS}^* = 1.63m_e$), e le masse longitudinali e trasversali del minimo anisotropo ($m_t^* = 0.3m_e$, $m_l^* = 0.8m_e$), calcolare la massa efficace del minimo isotropo nel punto Γ . Calcolare in fine la massa di conduzione.

Soluzione 7

La massa DOS è determinata imponendo l'uguaglianza tra i volumi isoenergetici di Fermi associati ai diversi minimi della banda di conduzione. Dal diagramma a bande in Fig.3 si individua un minimo isotropo nel punto Γ e un secondo minimo anisotropo lungo la direzione $\Gamma - X$. Nello spazio reciproco, le superfici isoenergetiche di Fermi sono rappresentate rispettivamente da una sfera, nel caso del minimo in Γ , e da sei ellissoidi equivalenti orientati lungo gli assi k_x , k_y e k_z .



$$m_{DOS}^{3/2} = m_{\Gamma}^{3/2} + 6\sqrt{m_t^2 m_l} \Rightarrow m_{\Gamma} = \left(m_{DOS}^{3/2} - 6\sqrt{m_t^2 m_l} \right)^{2/3} = 0.605m_e$$

Per determinare la massa efficace di conduzione, si considera la media armonica delle masse efficaci m_{Γ} , m_t e m_l , tenendo conto della degenerazione delle valli e del numero di contributi forniti da ciascun minimo lungo una generica direzione di conduzione. In particolare, il minimo isotropo nel punto Γ fornisce un unico contributo, mentre i sei minimi equivalenti lungo la direzione $\Gamma - X$ contribuiscono con due masse longitudinali m_l e quattro masse trasversali m_t .

$$\frac{m_{DOS}^{3/2}}{m_c} = 1 \cdot \frac{m_{\Gamma}^{3/2}}{m_{\Gamma}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_t} + 2 \cdot \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_l} \Rightarrow m_c = \left(\frac{m_{\Gamma}^{3/2}}{m_{\Gamma} \cdot m_{DOS}^{3/2}} + 4 \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_t \cdot m_{DOS}^{3/2}} + 2 \frac{\sqrt{m_t^2 m_l}}{m_l \cdot m_{DOS}^{3/2}} \right)^{-1} = 0.414m_e$$

Esercizio 8

Stimare la temperatura alla quale la concentrazione intrinseca dell'arseniuro di gallio (GaAs, $E_g = 1.42$ eV, $N_c(300\text{ K}) = 4.7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $N_v(300\text{ K}) = 7.0 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$) è pari alla concentrazione intrinseca del silicio a temperatura ambiente, trascurando la dipendenza delle densità equivalenti di stati dalla temperatura. Commentare quindi qualitativamente come cambierebbe il risultato ottenuto se si considerassero tali dipendenze.

Soluzione 8

Trascurando la dipendenza delle densità di stati effettive con la temperatura, la concentrazione intrinseca del GaAs risulterà quindi data da

$$n_{i,\text{GaAs}}(T) \sim \sqrt{N_{c,\text{GaAs}} \cdot N_{v,\text{GaAs}}} \cdot e^{-\frac{E_{g,\text{GaAs}}}{2kT}}$$

Dove $N_{c,\text{GaAs}} = 4.7 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $N_{v,\text{GaAs}} = 7.0 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ed $E_g = 1.42$ eV. Possiamo uguagliare la concentrazione intrinseca dell'GaAs con quella del silicio a temperatura ambiente

$$n_{i,\text{GaAs}}(T) = n_{i,\text{Si}} \Rightarrow \sqrt{N_{c,\text{GaAs}} \cdot N_{v,\text{GaAs}}} \cdot e^{-\frac{E_{g,\text{GaAs}}}{2kT}} = n_{i,\text{Si}}$$

Risolviendo l'equazione si ottiene

$$T = -\frac{E_{g,\text{GaAs}}}{2k \cdot \ln\left(\frac{n_{i,\text{Si}}}{\sqrt{N_{c,\text{GaAs}} \cdot N_{v,\text{GaAs}}}}\right)} = 441.5 \text{ K}$$

Esercizio 9

È dato un campione di silicio drogato n in regime di freeze-out a temperatura $T=30\text{ K}$. Sapendo che la concentrazione dei donori $N_D=10^{16}\text{ cm}^{-3}$ e la concentrazione di elettroni in banda di conduzione $n = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$, calcolare l'energia di legame E_C-E_D e la differenza $E_F(0\text{K}) - E_F(T)$.

Soluzione 9

Per un silicio a temperatura ambiente, la densità di stati effettiva in banda di conduzione è $N_C = 2.8 \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3}$. Ad una temperatura $T = 30\text{ K}$,

$$N_C(30\text{ K}) = N_C(300\text{ K}) \cdot \left(\frac{30}{300}\right)^{3/2} = 8.85 \cdot 10^{17}\text{ cm}^{-3}$$

In regime di freeze-out i donori non sono completamente ionizzati

$$n \sim N_D^+ = \frac{N_D}{1 + 2e^{-\frac{E_D - E_F(30\text{ K})}{kT}}}$$

Poiché $n = 10^{14}\text{ cm}^{-3}$ e $N_D=10^{16}\text{ cm}^{-3}$ è possibile ricavare $E_D - E_F$

$$E_F(30\text{ K}) - E_D = kT \cdot \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N_D}{n} - 1\right)\right) = 10\text{ meV}$$

L'energia di Fermi può essere ricavata partendo dalla concentrazione degli elettroni

$$n = N_C e^{-\frac{E_C - E_F(30\text{ K})}{kT}} \Rightarrow E_C - E_F(30\text{ K}) = kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right) = 23.5\text{ meV}$$

La differenza E_C-E_D è ottenuta mediante la somma dei due risultati numerici precedenti in quanto, in regime di freeze-out, il livello di Fermi è collocato tra E_D ed E_C .

$$E_C - E_F(30\text{ K}) + (E_D - E_F(30\text{ K})) = E_C - E_D = 33.5\text{ meV}$$

Per il calcolo di $E_F(0\text{K}) - E_F(T=30\text{K})$ esplicitiamo separatamente il livello di Fermi a 0 K e a 30 K

$$E_F(0\text{ K}) = \frac{E_C + E_D}{2}, \quad E_F(30\text{ K}) = E_C - kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right)$$

Valutiamone infine la differenza

$$\begin{aligned} E_F(0\text{ K}) - E_F(30\text{ K}) &= \frac{E_C + E_D}{2} - E_C + kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right) = \frac{E_D - E_C}{2} + kT \cdot \ln\left(\frac{N_C}{n}\right) = \\ &= -16.75\text{ meV} + 23.5\text{ meV} = 6.75\text{ meV} \end{aligned}$$

Esercizio 10

Si consideri un semiconduttore caratterizzato da tempi di rilassamento del momento per elettroni e lacune pari a $\tau_{m,n}^* = 100$ fs e $\tau_{m,n}^* = 300$ fs, rispettivamente. Sapendo che il rapporto fra le velocità è pari a $v_n/v_p = 2$ in presenza di un campo elettrico $F < F_{sat}$, si stimi il valore del rapporto v_n/v_p per $F > F_{sat}$, trascurando la dipendenza della massa efficace dal campo elettrico.

Soluzione 10

A bassi campi elettrici la velocità di drift v è data da:

$$v = \mu F$$

Dove μ indica la mobilità del portatore di interesse e F è il campo elettrico applicato.

In questo caso, il rapporto tra la velocità degli elettroni v_n e la velocità delle lacune v_p è:

$$\frac{v_n}{v_p} = 2$$

Sapendo che a bassi campi si ha

$$v_n = \mu_n F = q \frac{\tau_n}{m_n^*} F$$

$$v_p = \mu_p F = q \frac{\tau_p}{m_p^*} F$$

Si può trovare:

$$\frac{v_n}{v_p} = 2 = \frac{\tau_n}{m_n^*} \frac{m_p^*}{\tau_p} = \frac{1}{3} \frac{m_p^*}{m_n^*}$$

Per cui $\frac{m_p^*}{m_n^*} = 6$.

Nelle equazioni precedenti, τ_n e τ_p sono tempi medi di scattering con il reticolo per elettroni e lacune mentre m_n^* , m_p^* sono le masse efficaci di conduzione di elettroni e lacune.

Ad alti campi, la velocità non è più direttamente proporzionale tramite la mobilità al campo elettrico, bensì satura a valori dati dall'energia del fonone ottico del materiale in considerazione e dalla massa efficace del portatore tramite l'equazione:

$$v_{sat} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{f,ottico}}{2m^*}}$$

Da cui:

$$\frac{v_{sat,n}}{v_{sat,p}} = \sqrt{\frac{m_p^*}{m_n^*}} = \sqrt{6}$$