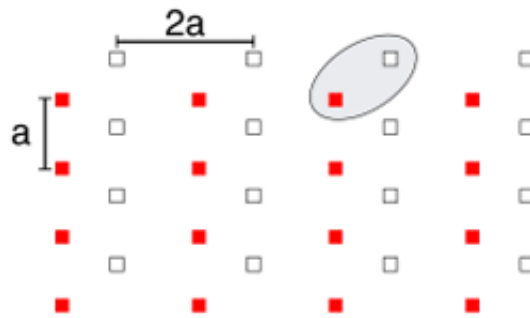


Esercizio 1

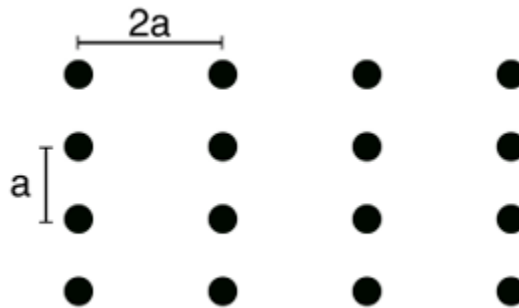
Si consideri il sistema cristallino in Fig. 1. Determinare se è un reticolo di Bravais. Disegnare la cella di Wigner-Seitz. Noto $a = 2 \text{ nm}$, determinare la densità atomica.

Soluzione 1

Non è un reticolo di Bravais. Una possibile base è data dalla coppia bianco-rosso:



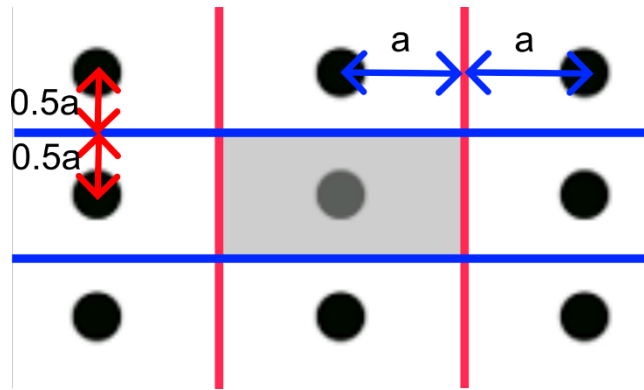
Da cui ci si può ricondurre a un reticolo rettangolare:



Conseguentemente si può calcolare la densità atomica **superficiale**:

$$\rho_s = \frac{N_{\text{at}}}{A_{\text{cell}}} = \left(N_{\text{at}} \cdot \frac{N_{\text{bases}}}{N_{\text{cell}}} \right) \cdot \frac{1}{a \cdot 2a} = \frac{2 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{4} \right)}{2a^2} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-18}} = 0.25 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} = 25 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$$

La cella di Wigner-Seitz è definita come lo spazio (area in questo caso) attorno a un punto del reticolo di Bravais che risulta più vicino ad esso rispetto agli altri punto del reticolo.



In particolare, l'area evidenziata in grigio risulta essere la cella di Wigner-Seitz.

Esercizio 2

Si consideri un setup di esperimento fotoelettrico con catodo in platino ($W = 5.65 \text{ eV}$) e tensione di accelerazione $V_A = 1.7 \text{ V}$. Determinare la presenza o assenza di effetto fotoelettrico nel caso di (a) una sorgente luminosa infrarossa ($\lambda_1 = 1.5 \mu\text{m}$) e di (b) una sorgente ultravioletta ($\lambda_2 = 193 \text{ nm}$). In caso affermativo, determinare inoltre la velocità degli elettroni all'anodo.

Soluzione 2

L'energia del fotone per le tre sorgenti vale:

$$E_1 = \frac{hc}{\lambda_1} \approx 0.828 \text{ eV} < W$$

$$E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} \approx 6.44 \text{ eV} > W$$

In presenza di illuminazione infrarossa e visibile, pertanto, non si ha emissione di elettroni.

Il lettore potrebbe trovare interessante il fatto che $\lambda_2 = 193 \text{ nm}$ è la lunghezza d'onda prodotta da un laser ad eccimeri in ArF. Questo laser è utilizzato nelle macchine per fotolitografia ottica DUV (Deep Ultra-Violet) che trova ancora utilizzo per i nodi tecnologici meno avanzati ($< 7 \text{ nm}$).

In presenza di emissione ultravioletta, l'energia cinetica dell'elettrone al catodo è data da:

$$E_{k,C} = E_2 - W = 6.44 - 5.65 = 0.7873 \text{ eV}$$

Viaggiando fino all'anodo in presenza di un campo elettrico dato dalla presenza della tensione di accelerazione V_A , l'elettrone acquisisce energia:

$$E_{k,A} = E_{k,C} + qV_A \approx 2.49 \text{ eV}$$

Ricordando che in approssimazione semiclassica vale:

$$E_{k,A} = \frac{1}{2} m_e v_e^2$$

Si ottiene:

$$v_e = \frac{\sqrt{2Es_{k,a}}}{\sqrt{m_e}} \approx 9.35 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Esercizio 3

Si consideri una buca di potenziale di profondità V_0 e larghezza a , seguita da una seconda buca di larghezza b , come mostrato in **Fig. 2**. Sapendo che il primo livello energetico della prima buca coincide con il terzo livello energetico della seconda buca ($E_{1,a} = E_{3,b} = 0.25 \text{ eV}$) determinare i valori di a e b in approssimazione di buca a pareti infinite. Rimuovere l'approssimazione di pareti infinite. Determinare V_0 sapendo che la probabilità $P(x) = |\psi(x)|^2$ si riduce di un fattore 10 entro 1 nm al di fuori della buca.

Soluzione 3

Utilizzando l'approssimazione di buca a pareti di potenziale infinite, si ha:

$$E_{n,a} = \frac{h^2}{8ma^2} n_a^2 \quad e \quad E_{n,b} = \frac{h^2}{8mb^2} n_b^2$$

Eguagliando le due con $n_a = 1$ ed $n_b = 3$, otteniamo:

$$b = 3a$$

Inoltre, siccome $E_{1,a} = E_{3,b} = 0.5 \text{ eV}$, possiamo calcolare direttamente b ed a . Per esempio:

$$a = \frac{h}{\sqrt{8mE_{1,a}}} \approx 1.23 \text{ nm}$$

Da cui possiamo calcolare b , che risulta essere:

$$b = 3a = 3.68 \text{ nm}$$

Per determinare V_0 è sufficiente ricordarsi che fuori da una buca di potenziale a pareti finite, l'autofunzione ha forma $\psi_{out} = e^{-\alpha x}$. Si può quindi scrivere:

$$e^{-\alpha \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha \Delta x = \ln \sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{2m(V_0 - E_{1,a})}}{\hbar} = \frac{1}{\Delta x^2} \ln \sqrt{10}$$

$$V_0 = \frac{(\ln \sqrt{10})^2 \hbar^2}{2m\Delta x^2} + E_{a,1} \approx 0.3 \text{ eV}$$

Si sarebbe potuti giungere allo stesso risultato ragionando con $|\psi_{out}|^2 = e^{-2\alpha x}$, ossia ponendo

$$e^{-2\alpha x} = \frac{1}{10}$$

$$-2\alpha x = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \rightarrow \alpha x = \frac{1}{2} \ln(10) = \ln(\sqrt{10})$$

Esercizio 4

Si consideri una particella di energia $E = 1,5 \cdot V_0$ incidente su una barriera di potenziale rettangolare di altezza V_0 e larghezza a , come mostrato in **Fig. 3**. Sapendo che il coefficiente di trasmissione è $T = J_t/J_i = 1$, determinare la larghezza (indicata con a) della barriera e calcolare la variazione della velocità della particella all'interno e all'esterno della barriera.

Soluzione 4

Condizione di probabilità di trasmissione = 1, caso di gradino di potenziale con $E > V_0$:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(k^2 - k'^2)^2}{(2kk')^2} \sin^2 k'a} = 1$$

La condizione è verificata se:

$$k' \cdot a = n\pi$$

Ossia per una lunghezza di buca:

$$a = n \frac{\lambda}{2}$$

Ci sono infinite lunghezze di buca per cui si verifica trasmissione completa, in particolare tutte le lunghezze di buca equivalenti a un numero intero di semi-lunghezze d'onda della particella incidente.

La lunghezza minima si ottiene per $n = 1$, quindi:

$$a = \frac{\lambda}{2}$$

Esercizio 5

Un elettrone in un cristallo di passo $a = 0.675 \text{ nm}$ è descritto da un'autofunzione $\psi_k(x) = u_k(x) \cdot e^{ikx}$, dove u_k è reale e positivo. Sapendo che l'autofunzione è reale positiva in x_0 e diventa reale negativa per la prima volta dopo 2.5 passi reticolari da x_0 , determinare il valore del vettore d'onda cristallino k . Tracciare quindi il profilo della parte reale dell'autofunzione $\psi_k(x)$ su 10 passi reticolari.

Soluzione 5

$$\frac{\psi_k(x_0 + 2.5a)}{\psi_k(x_0)} = \frac{u_k(x_0 + 2.5a)}{u_k(x_0)} \cdot e^{ik(x-x_0)}$$
$$\frac{u_k(x_0 + 2.5a)}{u_k(x_0)} > 0 \quad \forall x_0$$

Quindi il segno di $\psi_k(x)$ sarà determinato solo dal fattore di fase (onda piana).

Imponendo la condizione di segno negativo:

$$k(x - x_0) = (2n + 1)\pi$$
$$x - x_0 = 2.5a$$
$$k2.5a = \pi$$
$$k = \frac{2\pi}{5a} = 1.862 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$$

Esercizio 6

Un semiconduttore ha una banda di valenza caratterizzata da tre minimi isotropi con masse di conduzione $m_{hh} = 0.6m_0$, $m_{mh} = 0.5m_0$ e $m_{lh} = 0.4m_0$. Si calcolino la massa DOS e la massa di conduzione per le lacune.

Soluzione 6

Essendo i minimi isotropi e con massimo coincidente, la massa DOS è data da

$$m_{DOS} = \left(m_{lh}^{\frac{3}{2}} + m_{mh}^{\frac{3}{2}} + m_{hh}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.047m_0$$

La massa di conduzione può essere ricavata tramite media armonica

$$m_c = \left(\sqrt{m_{hh}} + \sqrt{m_{mh}} + \sqrt{m_{lh}} \right)^{-1} \cdot m_{DOS}^{\frac{3}{2}} = 0.507m_0$$

Esercizio 7

In un semiconduttore, il libero cammino medio degli elettroni (massa di conduzione $m^* = 0.5m_0$) a $T = 1K$ è $\lambda = 10 \mu m$. Si determini il tempo medio di rilassamento del momento alla temperatura indicata. Sarà minore o maggiore di quello a temperatura ambiente? Perché?

Soluzione 7

Il tempo medio di rilassamento del momento τ_m è legato al libero cammino medio e la velocità termica mediante la relazione

$$\tau_m = \frac{\lambda}{v_{th}}$$

La velocità termica media si ricava dall' equazione dell'energia cinetica classica per i portatori di carica

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m^*}} = 9536 \text{ m/s}$$

Da cui si ricava $\tau_m = 1 \text{ ns}$

A temperatura ambiente τ_m sarà minore. L' aumento di temperatura incrementa le vibrazioni reticolari (fononi) e la velocità termica, riducendo drasticamente il cammino libero medio e il tempo tra gli urti.

Esercizio 8

Si consideri un campione di silicio di tipo p avente $N_A = 10^{17} \text{cm}^{-3}$ ed $E_A - E_V = 37 \text{ meV}$. Facendo ragionevoli approssimazioni determinare $E_A - E_F(T=0 \text{ K})$ e la concentrazione di droganti ionizzati a $T = 23 \text{ K}$. Commentare il regime di ionizzazione per $T = 23 \text{ K}$.

Soluzione 8

Il livello di Fermi a $T = 0 \text{ K}$ sarà collocato a metà tra il massimo della banda di valenza e il livello accettore.

$$E_F(0 \text{ K}) - E_V = \frac{E_A - E_V}{2} = 18.5 \text{ meV}$$

Per $T = 23 \text{ K}$ la densità di stati effettiva in banda di valenza sarà minore rispetto a $T = 300 \text{ K}$

$$N_V(T = 23 \text{ K}) = N_V(T = 300 \text{ K}) \cdot \left(\frac{23 \text{ K}}{300 \text{ K}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2.21 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$$

Possiamo valutare adesso la nuova posizione del livello di Fermi per $T = 23 \text{ K}$

$$E_F(23 \text{ K}) - E_V = (E_F(0 \text{ K}) - E_V) + \frac{kT}{2} \cdot \ln\left(\frac{4 \cdot N_A}{N_V}\right) = 19.1 \text{ meV}$$

Dunque $E_A - E_F(23 \text{ K}) = 17.9 \text{ eV}$. I droganti ionizzati a $T = 23 \text{ K}$ saranno

$$p = \frac{N_A}{1 + 4 \cdot e^{\frac{E_A - E_F(23 \text{ K})}{kT}}} = 2.97 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$$

Per $T = 23 \text{ K}$ il semiconduttore è in regime di freeze-out in quanto $kT=2\text{meV}$ è molto inferiore all'energia di attivazione degli accettori ($E_A - E_V = 37 \text{ meV}$).

Esercizio 9

Un semiconduttore in esame è caratterizzato da $m_{DOS,n} = 0.5m_0$ e $m_{DOS,p} = 0.506m_0$. Si calcoli di quanto cambia il livello intrinseco se viene fatta variare la temperatura da $T_1 = 200$ K a $T_2 = 230$ K. Fornire il risultato in termini di $E_i(T_2) - E_i(T_1)$ in meV assumendo il gap indipendente dalla temperatura nel range indicato. Cosa è possibile concludere dal risultato ottenuto?

Soluzione 9

Il livello intrinseco ad una temperatura T è generalmente approssimato dalla relazione

$$E_i = \frac{E_{gap}}{2}$$

Tuttavia, per valutare la variazione del regime intrinseco con la temperatura, è necessario utilizzare la formula completa del livello intrinseco:

$$E_i = \frac{E_{gap}}{2} - \frac{3}{4}kT \cdot \ln\left(\frac{m_{DOS,n}}{m_{DOS,p}}\right)$$

Eseguendo la differenza dei livelli intrinseci, trascurando la dipendenza del gap dalla temperatura, il risultato finale risulterà essere:

$$\begin{aligned}\Delta E_i &= \left(\frac{E_{gap}}{2} - \frac{3}{4}kT_1 \cdot \ln\left(\frac{m_{DOS,n}}{m_{DOS,p}}\right)\right) - \left(\frac{E_{gap}}{2} - \frac{3}{4}kT_2 \cdot \ln\left(\frac{m_{DOS,n}}{m_{DOS,p}}\right)\right) = \\ &= \frac{3}{4}k(T_2 - T_1) \cdot \ln\left(\frac{m_{DOS,n}}{m_{DOS,p}}\right) = 23.1 \mu eV\end{aligned}$$

Esercizio 10

Un campione di silicio drogato p, caratterizzato da $N_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ e da un tempo di vita medio dei minoritari $\tau_n = 1 \mu\text{s}$, è sottoposto ad un irraggiamento uniforme che produce un tasso di fotogenerazione $G = 10^{22} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$. Determinare il tempo massimo di irraggiamento affinché il semiconduttore rimanga in regime di debole iniezione. Dopo un tempo di irraggiamento sufficiente a raggiungere il regime stazionario, la sorgente di fotogenerazione viene improvvisamente spenta. Determinare il tempo necessario affinché la concentrazione dei portatori minoritari si riduca ad 1/10 del valore di concentrazione misurato al regime stazionario.

Soluzione 10

Impostiamo l'equazione di continuità per i portatori minoritari

$$\frac{dn'}{dt} = G - \frac{n'}{\tau_n}$$

Risolvendo l'equazione differenziale a variabili separate, la soluzione risulterà essere

$$n' = G\tau_n(1 - e^{-t/\tau_n})$$

Il regime di debole iniezione impone che la concentrazione dei portatori in eccesso sia inferiore alla concentrazione dei maggioritari all'equilibrio:

$$n'(t_{max}) = N_A$$

$$G\tau_n(1 - e^{-t_{max}/\tau_n}) = N_A$$

$$t_{max} = -\tau_n \ln\left(1 - \frac{N_A}{G\tau_n}\right) = 105.3 \text{ ns}$$

Al regime stazionario, la concentrazione è $n'_{stationary} = G\tau_n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. L'equazione differenziale dopo lo spegnimento diventa:

$$\frac{dn'}{dt} = -\frac{n'}{\tau_n}$$

$$n' = n'_{stationary} e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

Il tempo Δt necessario a far ridurre la concentrazione a 1/10 del valore stazionario è calcolato imponendo $n'(\Delta t) = \frac{1}{10} n'_{stationary}$

$$\Delta t = -\tau_n \ln(1/10) = 2.3 \mu\text{s}$$